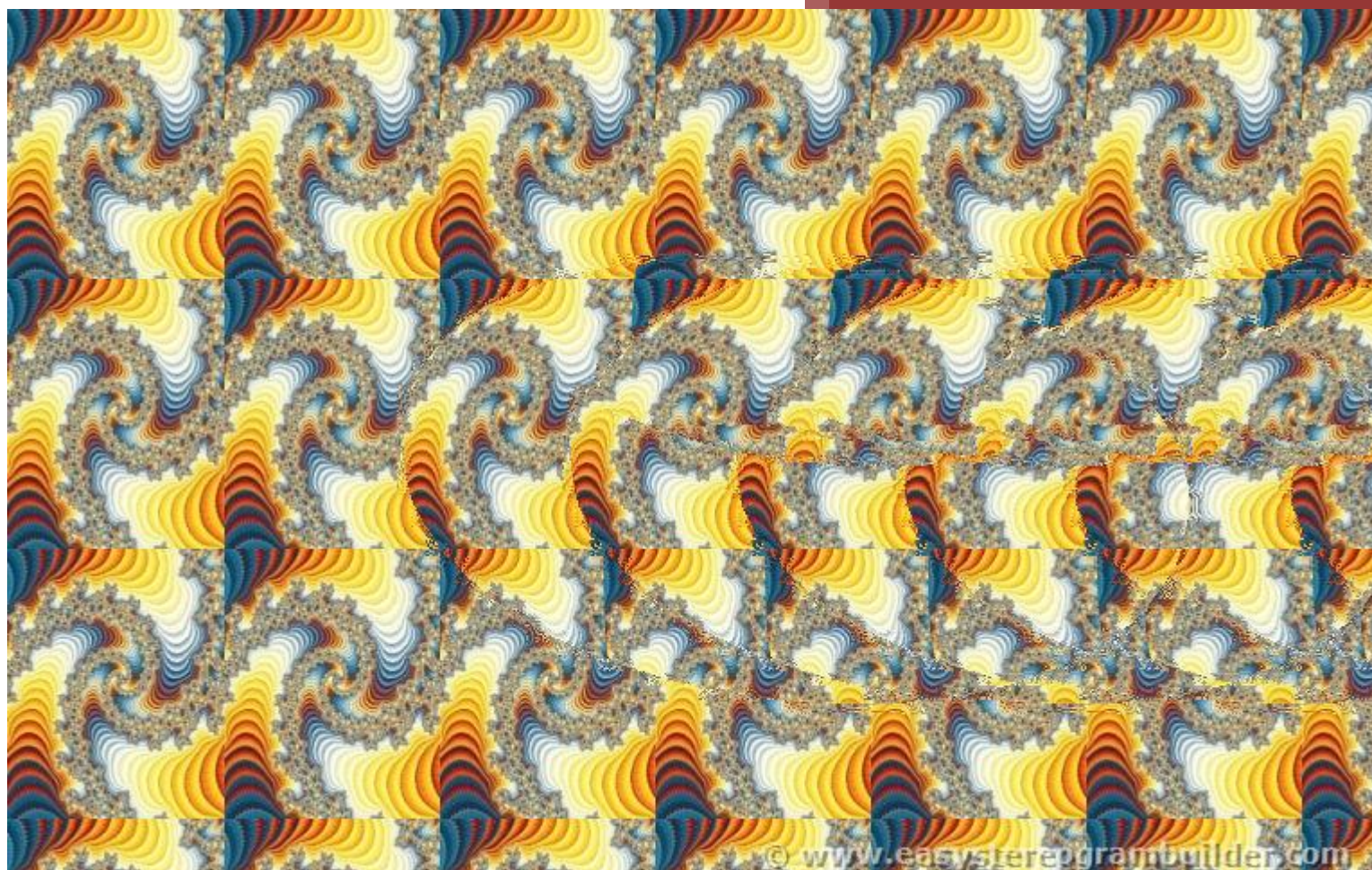


Σ. Ασημέλλης

Μαθηματικά



Αθήνα 2013

Αφιερωμένο στο δικαίωμα
ελεύθερης
διάδοσης της γνώσης.





Γνωρίζω, οι πρόλογοι των βιβλίων είναι ενδεχομένως το πιο σίγουρο τμήμα τους που κανένας δε διαβάξει. Στην πραγματικότητα όμως, αν και προτάσσονται, αποτελούν τον επίλογο μιας δουλειάς, αυτής του συγγραφέα. Γιατί κακά τα ψέματα, για να γράψεις τον πρόλογο, οφείλεις σίγουρα να έχεις ολοκληρώσει τη συγγραφή του υπόλοιπου μέρους.

Όταν το βιβλίο βέβαια πραγματεύεται Μαθηματικές έννοιες, ίσως τελικά η ευχή θα ήταν να μην είναι ο πρόλογος το μόνο κομμάτι που θα αναγνωστεί...

Τέλος πάντων, για να μην μακρηγορώ, μετά από 18 χρόνια στην εκπαίδευση αποφάσισα να αποτυπώσω σκέψεις στο χαρτί. Απλά, έτσι όπως θα μου άρεσε να έχουν διδάξει σε εμένα τα Μαθηματικά. Και με έναν τρόπο που φτάνει στην ουσία χωρίς περιττές πληροφορίες.

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας, δε διαβάζεται όπως οποιοδήποτε άλλο βιβλίο Μαθηματικών. Σίγουρα δεν προορίζεται για ανάγνωση από την αρχή προς το τέλος. Εδώ όμως μπορείτε να βρίσκετε καταφύγιο κάθε φορά που κάτι «σας λείπει». Οποτεδήποτε νοιώθετε πως κάτι δεν το μάθατε στην ώρα του ή απλά έχει ξεθωριάσει ή χαθεί από τη μνήμη σας. Ακόμη και για άγνωστες σας έννοιες, για τμήματα ύλης που ως τώρα δεν είχατε ακούσει, υπάρχουν οι επαρκείς πληροφορίες για να σας κάνουν να αντιληφθείτε όσα απαιτούνται για να τις χρησιμοποιήσετε.

Τα «Μαθημαγικά» εξελίσσονται εδώ και 12 χρόνια. Θα συνεχίσουν να εξελίσσονται, όσο συναντάω απορίες μαθητών που μπορούν να απαντηθούν με απλό και ειλικρινή τρόπο.

Καλή πλοήγηση,

Στράτος Ασημέλλης

Αθήνα, Αύγουστος 2013



Μαθηματικά Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1		
Βασικές Έννοιες		
A. Ιδιότητες δυνάμεων		Σελίδα 1
B. Αλγεβρικές Ταυτότητες		Σελίδα 2
Γ. Ρίζα πραγματικού αριθμού		Σελίδα 3
Δ. Ρητοποίηση κλάσματος		Σελίδα 4
E. Σύνολα αριθμών		Σελίδα 4
ΣΤ. Οι περιορισμοί στην άλγεβρα		Σελίδα 6
Κεφάλαιο 2		
Εξίσωση Πρώτου Βαθμού		
A1. Επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού		Σελίδα 7
A2. Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης πρώτου βαθμού		Σελίδα 10
B. Παραμετρική εξίσωση πρώτου βαθμού		Σελίδα 12
Γ. Επιτρεπτές πράξεις στα μέλη μιας εξίσωσης		Σελίδα 14
Δ. Επιτρεπτές πράξεις στα μέλη δύο εξισώσεων		Σελίδα 14
Κεφάλαιο 3		
Ανίσωση Πρώτου βαθμού		
A1. Επίλυση της ανίσωσης πρώτου βαθμού		Σελίδα 15
B. Τρόποι έκφρασης διαστημάτων		Σελίδα 16
Γ. Πράξεις επιτρεπτές στα μέλη μιας ανισότητας		Σελίδα 17
Δ. Πράξεις επιτρεπτές στα μέλη δύο ανισοτήτων		Σελίδα 18
Κεφάλαιο 4		
Τριώνυμο		
A. Επίλυση εξίσωσης δευτέρου βαθμού		Σελίδα 19
B. Ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης δευτέρου βαθμού		Σελίδα 20
Γ. Παραγοντοποίηση τριωνύμου		Σελίδα 21
Δ. Πρόσημο τριωνύμου		Σελίδα 22
E. Τύποι του Vieta		Σελίδα 23
ΣΤ. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$		Σελίδα 25
Κεφάλαιο 5		
Πολυωνυμικές εξισώσεις ανώτερου βαθμού		
A. Τρόποι επίλυσης		Σελίδα 30
B. Σχήμα Horner		Σελίδα 31
Κεφάλαιο 6		
Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού		
A. Βασικές έννοιες		Σελίδα 33
B. Ιδιότητες απόλυτων		Σελίδα 34
Γ. Εξισώσεις με απόλυτα		Σελίδα 35
Δ. Ανισώσεις με απόλυτα		Σελίδα 39
E. Απόλυτο, απόσταση και διάστημα		Σελίδα 41
Κεφάλαιο 7		
Συστήματα γραμμικών εξισώσεων		
A. Βασικές έννοιες		Σελίδα 42
B. Μέθοδος αντικατάστασης		Σελίδα 43
Γ. Μέθοδος αντίθετων συντελεστών		Σελίδα 45

Δ. Μέθοδος οριζουσών	Σελίδα 47
Ε. Παραμετρικά συστήματα	Σελίδα 49
Κεφάλαιο 8	
Τριγωνομετρία	
Α. Βασικές έννοιες	Σελίδα 52
Β. Τριγωνομετρικοί αριθμοί χρήσιμων γωνιών	Σελίδα 53
Γ. Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο	Σελίδα 54
Δ. Τριγωνομετρικές ταυτότητες	Σελίδα 56
Ε. Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών	Σελίδα 58
ΣΤ. Τριγωνομετρικές εξισώσεις	Σελίδα 59
ΣΤ1. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις	Σελίδα 59
ΣΤ2. Τριγωνομετρικές εξισώσεις με μείον	Σελίδα 60
ΣΤ3. Τριγωνομετρικές εξισώσεις με σύνθετες εκφράσεις του x	Σελίδα 61
ΣΤ4. Τριγωνομετρικές εξισώσεις τριγωνομετρικής μορφής	Σελίδα 62
Ζ. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	Σελίδα 63
Ζ1. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$	Σελίδα 63
Ζ2. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu(\beta x + \gamma) + \delta$	Σελίδα 64
Ζ3. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	Σελίδα 65
Ζ4. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x + \gamma) + \delta$	Σελίδα 66
Ζ5. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$	Σελίδα 63
Ζ6. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$	Σελίδα 67
Κεφάλαιο 9	
Ειδική περίπτωση εξίσωσης και ανίσωσης νιοστού βαθμού	
Α. Επίλυση της εξίσωσης $x^n = \alpha$	Σελίδα 68
Β. Επίλυση της ανίσωσης $x^n > \alpha$	Σελίδα 69
Γ. Επίλυση της ανίσωσης $x^n < \alpha$	Σελίδα 70
Κεφάλαιο 10	
Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση	
Α. Εκθετική συνάρτηση	Σελίδα 71
Β. Λογαριθμική συνάρτηση	Σελίδα 72
Γ. Ιδιότητες Λογαρίθμων	Σελίδα 74
Κεφάλαιο 11	
Πράξεις με σύνολα	Σελίδα 75
Κεφάλαιο 12	
Ακολουθίες	
Α. Αριθμητική πρόοδος	Σελίδα 76
Β. Γεωμετρική πρόοδος	Σελίδα 77
Κεφάλαιο 13	
Η ευθεία	
Α. Γενικής μορφή ευθείας	Σελίδα 78
Β. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας	Σελίδα 78
Γ. Κοινά σημεία της ευθείας με τους άξονες	Σελίδα 80
Δ. Συνθήκη παραλληλίας ευθειών	Σελίδα 80
Ε. Συνθήκη καθετότητας ευθειών	Σελίδα 80
ΣΤ. Κοινά σημεία ευθειών	Σελίδα 81
Ζ. Απόσταση σημείου από ευθεία	Σελίδα 82
Η. Εμβαδόν τριγώνου που ορίζεται από τρία σημεία	Σελίδα 83

Κεφάλαιο 14		
Κωνικές τομές		
A. Κύκλος		Σελίδα 84
B. Παραβολή		Σελίδα 86
Γ. Έλλειψη		Σελίδα 88
Δ. Υπερβολή		Σελίδα 92
Κεφάλαιο 15		
Μαθηματικές συνθήκες		
Μαθηματικές συνθήκες		Σελίδα 96
Κεφάλαιο 16		
Σημεία στα επίπεδο		
A. Σύστημα συντεταγμένων		Σελίδα 97
B. Συμμετρικά σημεία		Σελίδα 99
Γ. Απόσταση σημείων του επιπέδου		Σελίδα 100
Δ. Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος		Σελίδα 100
Παράρτημα		
Λίγα λόγια για το εξώφυλλο του βιβλίου		

βασικές έννοιες

ιδιότητες δυνάμεων

Οι κυριότερες ιδιότητες των δυνάμεων περιέχονται στον παρακάτω πίνακα.

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots}_{\nu \text{ φορές}}, \nu \in \mathbb{N}$$

$$\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$$

$$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$$

$$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

$$\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-x} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$$

Οι κυριότερες αλγεβρικές ταυτότητες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta + 3 \cdot \alpha \cdot \beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2)$$

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \cdot \beta + \alpha^{n-3} \cdot \beta^2 - \dots + \alpha \cdot \beta^{n-2} - \beta^{n-1})$$

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \cdot \beta + \alpha^{n-3} \cdot \beta^2 + \dots + \alpha \cdot \beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + 2 \cdot \alpha \cdot \gamma + 2 \cdot \beta \cdot \gamma$$

Οι κυριότερες ιδιότητες της (τετραγωνικής ή ανώτερης τάξης) ρίζας πραγματικού αριθμού, παρουσιάζονται παρακάτω.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ με } x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\rho}$$

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ χρειάζεται να επιδεικνύουμε στην εφαρμογή της τρίτης και της τέταρτης ιδιότητας, γιατί ενδεχομένως μπορούμε να οδηγηθούμε σε λάθη:

Για παράδειγμα, πάντα ισχύει $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ αλλά όχι και $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{-2}{-3}} = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$.

Επίσης, για να ορίζεται η ποσότητα $\sqrt{\frac{x-2}{4+y}}$ θα πρέπει $(x-2) \cdot (4+y) \geq 0$, δηλαδή το $x-2$ και το $4+y$ να είναι ομόσημα.

Όμως, για να ορίζεται η ποσότητα $\sqrt{\frac{x-2}{4+y}}$ θα πρέπει $x-2 \geq 0$ και $4+y > 0$, δηλαδή και οι δύο ποσότητες οφείλουν να είναι θετικές ή μηδέν (ο παρονομαστής διάφορος του μηδενός).

Δ

ρητοποίηση κλάσματος

Για τη ρητοποίηση κλάσματος που έχει ως παρονομαστή ριζικά ή μιγαδική ποσότητα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος, με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί.

παρονομαστής	συζυγής παράσταση
$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\alpha}$
$\sqrt[n]{\alpha^n}$	$\sqrt[n]{\alpha^{n-n}}$
$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$
$\alpha + \beta i$	$\alpha - \beta i$
$\alpha - \beta i$	$\alpha + \beta i$

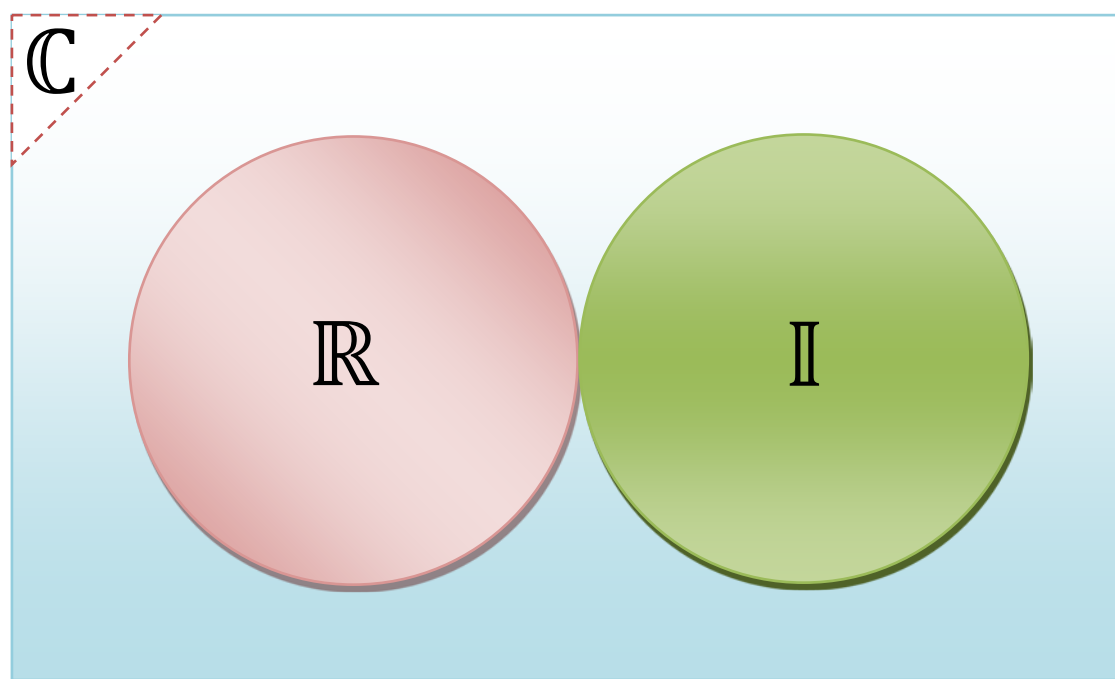
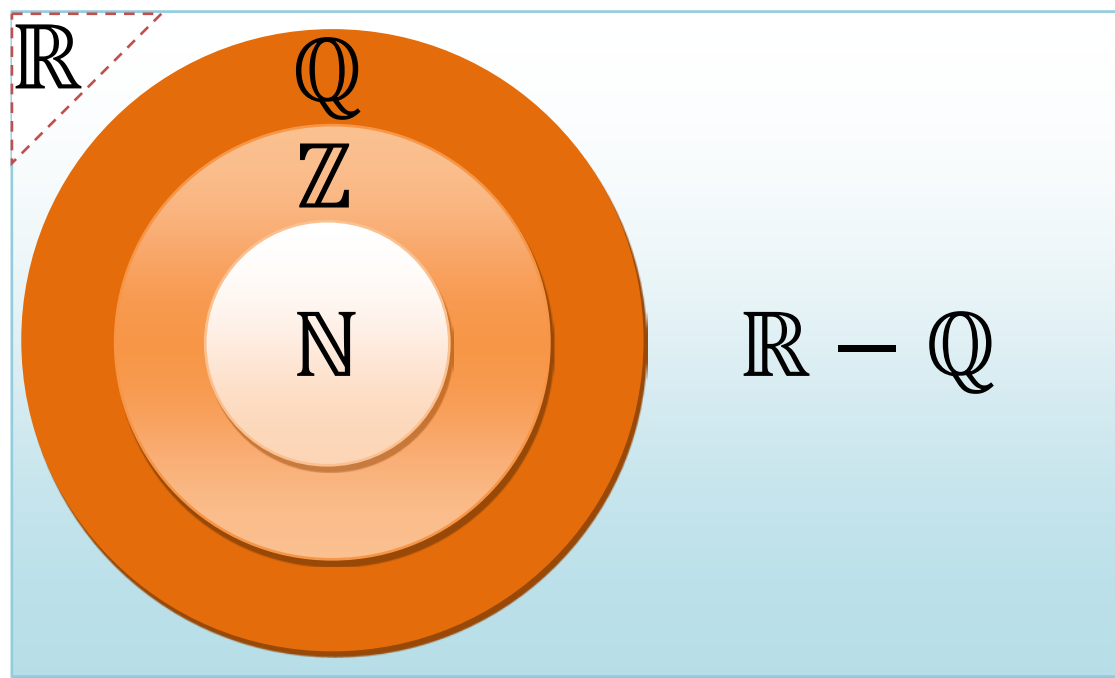
Ε

σύνολα αριθμών

Τα σημαντικότερα σύνολα αριθμών, είναι τα παρακάτω:

σύμβολο	όνομα	ερμηνεία
$\mathbb{N}$	φυσικοί	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι	$\{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί	στους ρητούς αριθμούς ανήκουν δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμών: ▶ οι απειροσμήφιοι περιοδικοί αριθμοί π.χ. 3,723232323... ▶ οι πεπερασμένοι δεκαδικοί π.χ. 7,35
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	άρρητοι	στους άρρητους αριθμούς ανήκουν οι απειροσμήφιοι μη περιοδικοί αριθμοί π.χ. $\sqrt{7}$, π, e
$\mathbb{R}$	πραγματικοί	το σύνολο ρητών και άρρητων αριθμών σχηματίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{I}$	φανταστικοί	είναι αριθμοί της μορφής $\beta \cdot i$, με $\beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα
$\mathbb{C}$	μιγαδικοί	είναι αριθμοί της μορφής $\alpha + \beta i$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα

Διαγραμματικά, τα σύνολα αριθμών παριστάνονται ως εξής:



Οι συνηθέστερα εμφανιζόμενοι περιορισμοί στην Άλγεβρα είναι:

- ➡ Σε κλάσματα ζητάμε ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΕΣ $\neq 0$
- ➡ Στις ρίζες ζητάμε τα ΥΠΟΡΙΖΑ ≥ 0
- ➡ Στο $\log_{\alpha} x$ ζητάμε $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$
- ➡ Στην $\epsilon\phi x$ ζητάμε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- ➡ Στη $\sigma\phi x$ ζητάμε $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

εξίσωση πρώτου βαθμού

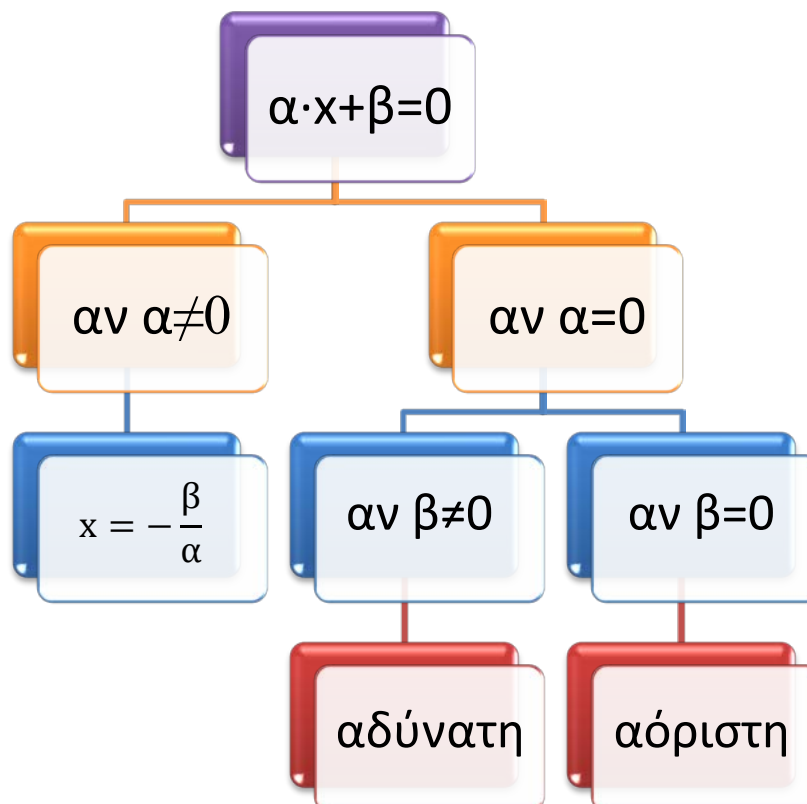
επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού

Εξίσωση, είναι κάθε ισότητα που περιέχει κάποιον άγνωστο, την τιμή του οποίου καλούμαστε να προσδιορίσουμε. Ο βαθμός μιας εξίσωσης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου (συνήθως ο άγνωστος συμβολίζεται με το γράμμα x). Έτσι όταν ο άγνωστος εμφανίζεται υψωμένος στην πρώτη μόνο δύναμη, η αντίστοιχη εξίσωση ονομάζεται πρώτου βαθμού.

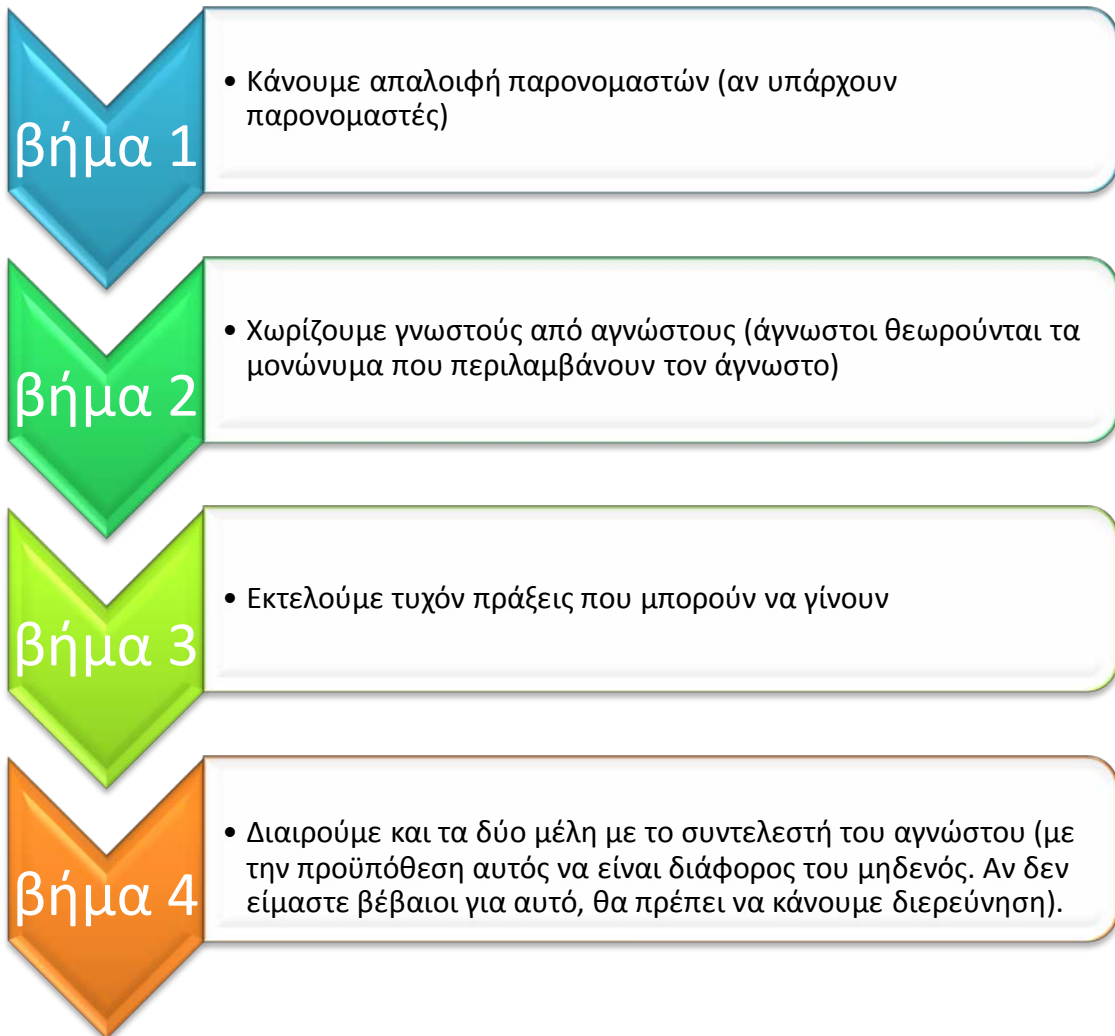
Η γενική μορφή της εξίσωσης πρώτου βαθμού είναι:

$$\alpha \cdot x + \beta = 0$$

Το διάγραμμα ροής για την επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού είναι:



Στην ουσία, όταν μας δώσουν μια εξίσωση πρώτου βαθμού, για να τη λύσουμε ακολουθούμε την παρακάτω πορεία:



παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3x-1}{2} - \frac{5-x}{6} = x + \frac{5x-1}{3}$.

Λύση

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{5-x}{6} = x + \frac{5x-1}{3} \Leftrightarrow$$

$$6 \frac{3x-1}{2} - 6 \frac{5-x}{6} = 6x + 6 \frac{5x-1}{3} \Leftrightarrow$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών,
πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της
εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.

$$3(3x-1) - (5-x) = 6x + 2(5x-1) \Leftrightarrow$$

$$9x - 3 - 5 + x = 6x + 10x - 2 \Leftrightarrow$$

Κάνουμε τις πράξεις
(πολλαπλασιασμούς)

$$9x + x - 6x - 10x = 3 + 5 - 2 \Leftrightarrow$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$$-6x = 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{6}{-6} \Leftrightarrow$$

Διαιρούμε με το συντελεστή του
αγνώστου

$$x = -1$$

Α 2

ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης πρώτου βαθμού

Αν μια εξίσωση πρώτου βαθμού κατά την επίλυσή της οδηγηθεί σε άτοπο, είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

Αν μια εξίσωση πρώτου βαθμού κατά την επίλυσή της οδηγηθεί σε κάτι αυτονόητα ορθό, είναι ΑΟΡΙΣΤΗ.

Παραδείγματα: Να λυθούν οι εξισώσεις

$$1. \quad \frac{3x-2}{4} = x - \frac{x-5}{4}$$

$$2. \quad \frac{x+2}{3} = \frac{5x+4}{6} - \frac{x}{2}$$

Λύση

1. $\frac{3x-2}{4} = x - \frac{x-5}{4}$	
$4 \cdot \frac{3x-2}{4} = 4 \cdot x - 4 \cdot \frac{x-5}{4}$	Απαλοιφή παρονομαστών
$3x - 2 = 4x - (x - 5)$	
$3x - 2 = 4x - x + 5$	Κάνουμε πράξεις
$3x - 2 = 3x + 5$	
$3x - 3x = 2 + 5$	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
$0x = 7$	
$0 = 7$	
Αδύνατη	

2. $\frac{x+2}{3} = \frac{5x+4}{6} - \frac{x}{2}$	
$6 \cdot \frac{x+2}{3} = 6 \cdot \frac{5x+4}{6} - 6 \cdot \frac{x}{2}$	Απαλοιφή παρονομαστών
$2(x+2) = 5x+4-3x$	Κάνουμε πράξεις
$2x+4 = 5x+4-3x$	
$2x-5x+3x = 4-4$	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
$0x = 0$	
$0 = 0$	
Αόριστη	

B

παραμετρική εξίσωση πρώτου βαθμού

Στις παραμετρικές εξισώσεις πρώτου βαθμού, εκτός από τον άγνωστο x , υπάρχει και άλλο γράμμα (συνήθως συμβολίζεται λ). Αυτό το γράμμα δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως άγνωστος. Πρόκειται για ένα γράμμα, που ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει, τροποποιεί την εξίσωση. Έτσι η παράμετρος μπορεί να καταστήσει μια εξίσωση αδύνατη, να την κάνει να έχει μία λύση ή άπειρες λύσεις.

Για να μπορέσουμε να βρούμε τον τρόπο που η παράμετρος επιδρά στην εξίσωση στην οποία περιέχεται, οφείλουμε να κάνουμε διερεύνηση, δηλαδή να εξετάσουμε τι θα συμβεί για κάθε διαφορετική τιμή της παραμέτρου.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση μιας παραμετρικής εξίσωσης πρώτου βαθμού περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
(αν υπάρχουν παρονομαστές)

Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους
(άγνωστοι θεωρούνται τα μονώνυμα που περιλαμβάνουν τον άγνωστο)
ΠΡΟΣΟΧΗ! Η παράμετρος ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΓΝΩΣΤΟΣ

Εκτελούμε τυχόν πράξεις που μπορούν να γίνουν

Διερευνούμε τις περιπτώσεις:

- A. ο συντελεστής του αγνώστου να μην είναι μηδέν
- B. ο συντελεστής του αγνώστου να είναι μηδέν

Παράδειγμα: Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση

$$4 - 5\lambda x - \lambda^2 = -\lambda^2 x - 6x$$

Λύση

$4 - 5\lambda x - \lambda^2 = -\lambda^2 x - 6x$	Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
$\lambda^2 x - 5\lambda x + 6x = \lambda^2 - 4$	Κάνουμε πράξεις
$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$	
$(\lambda - 2)(\lambda - 3)x = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$	ΔΕ ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΜΕ ΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΑΦΟΥ ΔΕ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΝ ΕΙΝΑΙ Ή ΟΧΙ ΔΙΑΦΟΡΟΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ

Στο σημείο αυτό αρχίζουμε τη διερεύνηση:

A. Αν $(\lambda - 2)(\lambda - 3) \neq 0$ τότε:	B. Αν $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ τότε:	
$\frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{(\lambda - 2)(\lambda - 3)} x = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}$	Αν $\lambda=2$ τότε:	Αν $\lambda=3$ τότε:
$x = \frac{\lambda + 2}{\lambda - 3}$	$0x = 0$	$0x = 5$
μοναδική λύση	αόριστη	αδύνατη

Γ

επιτρεπτές πράξεις στα μέλη μιας εξίσωσης

Μεταξύ των μελών μιας εξίσωσης μπορούμε:

να προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό	$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
να αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό	$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$
να πολλαπλασιάζουμε με τον ίδιο αριθμό	$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
να διαιρούμε με τον ίδιο, μη μηδενικό αριθμό	$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

Δ

επιτρεπτές πράξεις στα μέλη δύο εξισώσεων

Δύο εξισώσεις μπορούμε κατά μέλη:

να τις προσθέτουμε	$\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$
να τις αφαιρούμε	$\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$
να τις πολλαπλασιάζουμε	$\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$
να τις διαιρούμε, αρκεί βέβαια να μη διαιρούμε με το μηδέν	$\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, \text{ με } \gamma \cdot \delta \neq 0$

ανίσωση πρώτου βαθμού

επίλυση της ανίσωσης πρώτου βαθμού

Στην ανίσωση πρώτου βαθμού, το x εμφανίζεται υψωμένο μόνο στην πρώτη δύναμη. Η λύση μιας ανίσωσης, συνήθως οδηγεί σε διαστήματα λύσεων (σύνολα τιμών).

Για να λύσουμε μια ανίσωση πρώτου βαθμού, ακολουθούμε τα στάδια επίλυσης μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού. Η μόνη διαφορά προκύπτει στο τελικό βήμα, σε περίπτωση που ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός, οπότε και αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

Η πορεία επίλυσης μιας ανίσωσης πρώτου βαθμού είναι αυτή που παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα.

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
(αν υπάρχουν παρονομαστές)

Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους
(άγνωστοι θεωρούνται τα μονώνυμα που περιλαμβάνουν τον άγνωστο)

Εκτελούμε τυχόν πράξεις που μπορούν να γίνουν

Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι **θετικός**.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου και η φορά της ανίσωσης **διατηρείται**.

Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι **αρνητικός**.

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου και η φορά της ανίσωσης **αλλάζει**.

B

τρόποι έκφρασης διαστημάτων

Συνήθως η λύση μιας ανίσωσης είναι ένα σύνολο τιμών, δηλαδή ένα διάστημα. Παρακάτω δίνονται οι μορφές των διαστημάτων που εμφανίζονται πιο συχνά.

Περιγραφή Λύσης	Διάστημα	Απεικόνιση διαστήματος
$x > \alpha$	$x \in (\alpha, +\infty)$	
$x \geq \alpha$	$x \in [\alpha, +\infty)$	
$\beta > x > \alpha$	$x \in (\alpha, \beta)$	
$x \neq \alpha$	$x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$	
$\beta > x \geq \alpha \text{ ή } x = \gamma$	$x \in [\alpha, \beta) \cup \{\gamma\}$	

Γ

πράξεις επιτρεπτές στα μέλη μιας ανισότητας

Μεταξύ των μελών μιας ανισότητας μπορούμε:

να προσθέτουμε τον ίδιο αριθμό	$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
να αφαιρούμε τον ίδιο αριθμό	$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$
να πολλαπλασιάζουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, οπότε:	
αν ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε είναι ΘΕΤΙΚΟΣ, η φορά της ανισότητας διατηρείται:	$\alpha > \beta \xRightarrow{\gamma > 0} \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
αν ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε είναι ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ, η φορά της ανισότητας ΑΛΛΑΖΕΙ:	$\alpha > \beta \xRightarrow{\gamma < 0} \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
να διαιρούμε με τον ίδιο, μη μηδενικό αριθμό, οπότε:	
αν ο αριθμός με τον οποίο διαιρούμε είναι ΘΕΤΙΚΟΣ, η φορά της ανισότητας διατηρείται:	$\alpha > \beta \xRightarrow{\gamma > 0} \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
αν ο αριθμός με τον οποίο διαιρούμε είναι ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ, η φορά της ανισότητας ΑΛΛΑΖΕΙ:	$\alpha > \beta \xRightarrow{\gamma < 0} \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αντιστροφή μιας ανισότητας με ομόσημα μέλη συνεπάγεται και αντιστροφή της φοράς της.

$$\alpha > \beta > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

$$0 > \alpha > \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αντιστροφή μιας ανισότητας με ετερόσημα μέλη συνεπάγεται διατήρηση της φοράς της.

$$\text{Αν } \alpha > \beta, \text{ με } \alpha > 0 \text{ και } \beta < 0, \text{ τότε ισχύει: } \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$



πράξεις επιτρεπτές στα μέλη δύο ανισοτήτων

Δύο ανισότητες μπορούμε κατά μέλη:

να τις προσθέτουμε (έχοντας βέβαια την ίδια φορά)	$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
να τις πολλαπλασιάζουμε, αρκεί όλα τους τα μέλη να είναι θετικά	$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta > 0 \\ \gamma > \delta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν έχουμε δικαίωμα να αφαιρούμε ή να διαιρούμε τα μέλη δύο ανισοτήτων.

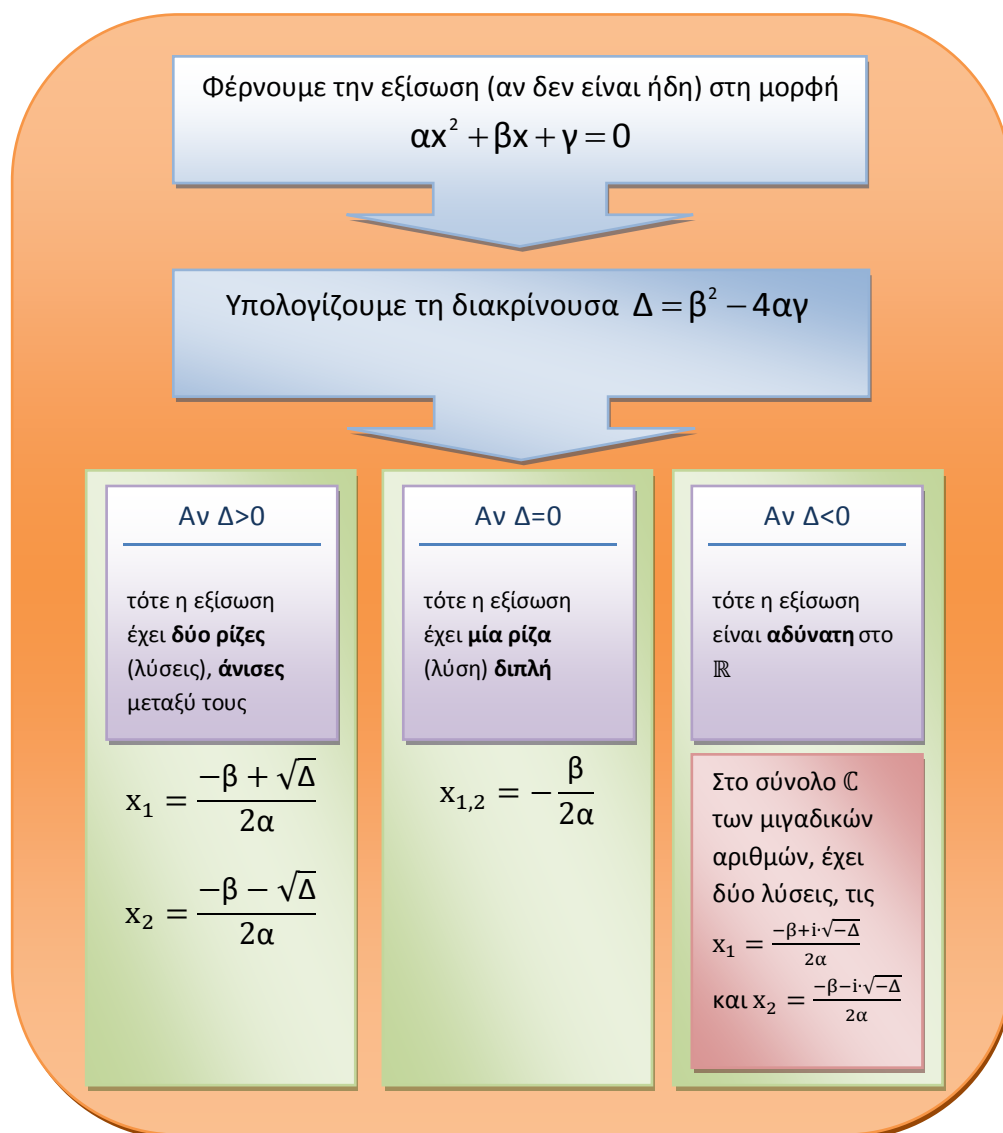
τριώνυμο

επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού στην πλήρη της μορφή ονομάζεται τριώνυμο, γιατί αποτελείται από τρία μονώνυμα. Η γενική μορφή της είναι:

$$αχ^2 + βχ + γ = 0 \text{ με } α \neq 0$$

Η ακολουθία βημάτων για την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η παρακάτω:



Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η εξίσωση δευτέρου βαθμού δεν είναι πλήρης, δηλαδή απουσιάζει κάποιο από τα μονώνυμα πρώτου ή μηδενικού βαθμού (σταθερός όρος). Είναι προφανές ότι αν απουσιάζει το μονώνυμο δευτέρου βαθμού, τότε η εξίσωση δεν είναι δευτέρου βαθμού και για τη λύση της ακολουθούμε την πορεία που προβλέπεται για τις εξισώσεις πρώτου βαθμού. Η γενική πορεία επίλυσης για την εξίσωση δευτέρου βαθμού που περιγράψαμε προηγούμενα, βρίσκει εφαρμογή και στις ειδικές περιπτώσεις που θα μελετήσουμε, εντούτοις θεωρείται ταχύτερη η λύση τους με τις παρακάτω μεθόδους.

αν $\beta=0$ τότε η μορφή που λαμβάνει η εξίσωση είναι $\alpha x^2 + \gamma = 0$

η πορεία επίλυσης σε αυτή την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

αν $-\frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

αν $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$

η εξίσωση είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**

αν $\gamma=0$ τότε η μορφή που λαμβάνει η εξίσωση είναι $\alpha x^2 + \beta x = 0$

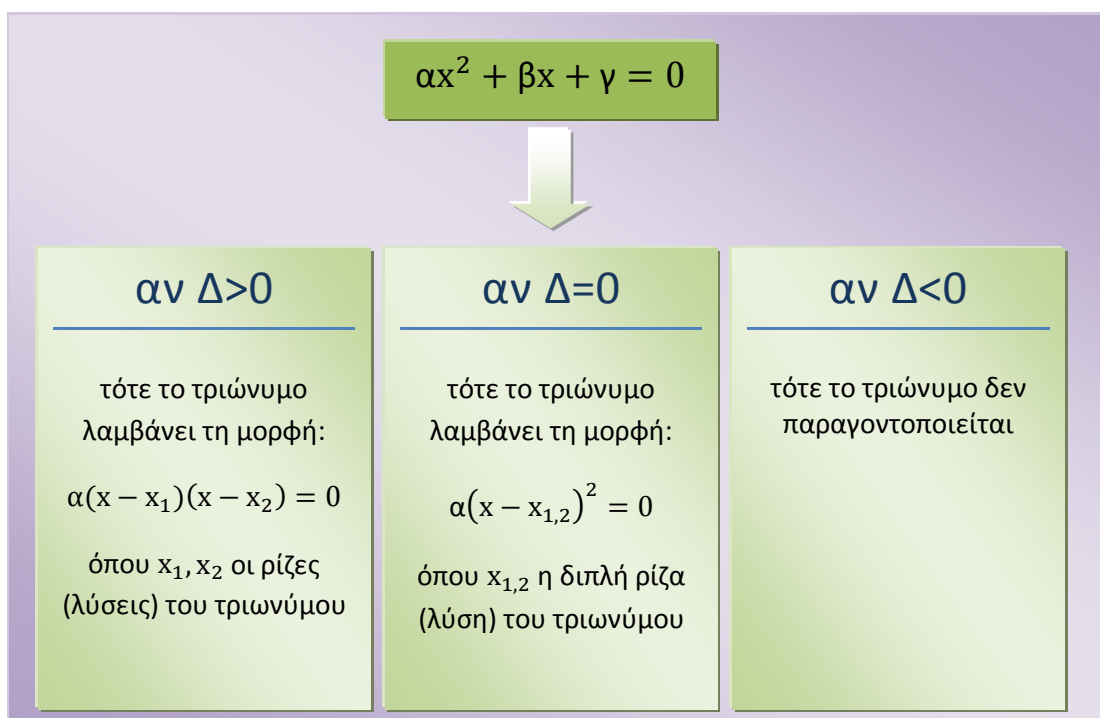
η πορεία επίλυσης σε αυτή την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

μία τέτοια εξίσωση δεν μπορεί ποτέ να είναι αδύνατη

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου, μας βοηθάει να μετατρέπουμε τα μονώνυμα του σε γινόμενο όρων πρώτου βαθμού. Έτσι επιλύονται ευκολότερα ανισώσεις δευτέρου βαθμού και απλοποιούνται κλάσματα με πολυωνυμικούς όρους.

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο, θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις ρίζες (λύσεις) του. Στη συνέχεια, βασιζόμαστε στο διάγραμμα του πίνακα που ακολουθεί.



Δ

πρόσημο τριωνύμου

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, ανεξάρτητα από το αν έχει ή όχι τιμές μηδενισμού (ρίζες), για κάθε τιμή που αντικαθιστούμε στη θέση του x , μας δίνει ένα αποτέλεσμα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι άλλοτε θετικό, άλλοτε αρνητικό και άλλοτε μηδέν. Το παρακάτω διάγραμμα μας βοηθάει να προβλέψουμε το πρόσημο αυτού του αποτελέσματος.

$$ax^2 + bx + \gamma$$



αν $\Delta > 0$

$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	ομόσημο του α

αν $\Delta = 0$

$-\infty$	$x_{1,2}$	$+\infty$
ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

αν $\Delta < 0$

$-\infty$	$+\infty$
ομόσημο του α	

Ε

τύποι Vieta

Αν έχουμε ένα τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma = 0$, το οποίο έχει λύσεις, τότε ένας σύντομος τρόπος για να τις προσδιορίσουμε, χωρίς τη χρήση διακρίνουσας, είναι με τη βοήθεια των τύπων του Vieta.

Στην ουσία για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου σκεφτόμαστε ως εξής:

βήμα 1

ψάχνουμε δύο αριθμούς που όταν τους προσθέτουμε θα μας δίνουν $S = -\frac{b}{a}$

βήμα 2

ψάχνουμε δύο αριθμούς που όταν τους πολλαπλασιάζουμε θα μας δίνουν $P = \frac{\gamma}{a}$

Έτσι, εύκολα το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma = 0$, μπορεί τελικά να μετασχηματιστεί σε

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Τα παραπάνω αποδεικνύονται με βάση την πορεία που ακολουθεί:

Έχουμε ένα τριώνυμο της γενικής μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με ρίζες (λύσεις) τις

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Το άθροισμα των δύο ριζών το συμβολίζουμε S και το γινόμενο τους P , δηλαδή:

$$S = x_1 + x_2 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2.$$

$$\text{Όμως } S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\beta^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Τότε το αρχικό τριώνυμο μπορούμε να το γράψουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x^2}{\alpha} + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Αν ένα τριώνυμο της γενικής μορφής

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει $\Delta \geq 0$ δηλαδή έχει λύσεις x_1 και x_2 , τότε:

- ➡ Αν $S=0$, τότε οι λύσεις είναι αντίθετες
- ➡ Αν $P=1$, τότε οι λύσεις είναι αντίστροφες
- ➡ Αν $P<0$, οι λύσεις είναι ετερόσημες
- ➡ Αν $P>0$, οι λύσεις είναι ομόσημες
- ➡ Αν $P>0$ και $S>0$, οι λύσεις είναι θετικές
- ➡ Αν $P>0$ και $S<0$, οι λύσεις είναι αρνητικές
- ➡ Αν $P<0$ και $S>0$, οι λύσεις είναι ετερόσημες, με τη θετική λύση να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από την αρνητική
- ➡ Αν $P<0$ και $S<0$, οι λύσεις είναι ετερόσημες, με την αρνητική λύση να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τη θετική

ΣΤ

η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει:

- ➡ Πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- ➡ Σύνολο τιμών

αν $a > 0$	αν $a < 0$
το σύνολο $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$	το σύνολο $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

- ➡ Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{b}{2a}$
- ➡ Ακρότατο το σημείο $A(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ το οποίο

αν $a > 0$	αν $a < 0$
είναι ελάχιστο	είναι μέγιστο

- ➡ Κοινό σημείο με τον άξονα γ'γ το $B(0, f(0))$
- ➡ Κοινά σημεία με τον άξονα x'x: Για να βρούμε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, με τον άξονα x'x, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Ανάλογα με τον αν προκύψουν δύο λύσεις (x_1, x_2 αν $\Delta > 0$), μία λύση ($x_{1,2}$ αν $\Delta = 0$) ή καμία λύση (αν $\Delta < 0$) διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

αν $\Delta > 0$	αν $\Delta = 0$	αν $\Delta < 0$
Δύο κοινά σημεία, τα $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$	Ένα κοινό σημείο, το $A(x_{1,2}, 0)$	Κανένα κοινό σημείο με τον άξονα x'x

➡ Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ μπορεί με διαδοχικά βήματα να γραφεί:

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \gamma$$

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \gamma - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \gamma - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4a\gamma}{4a}$$

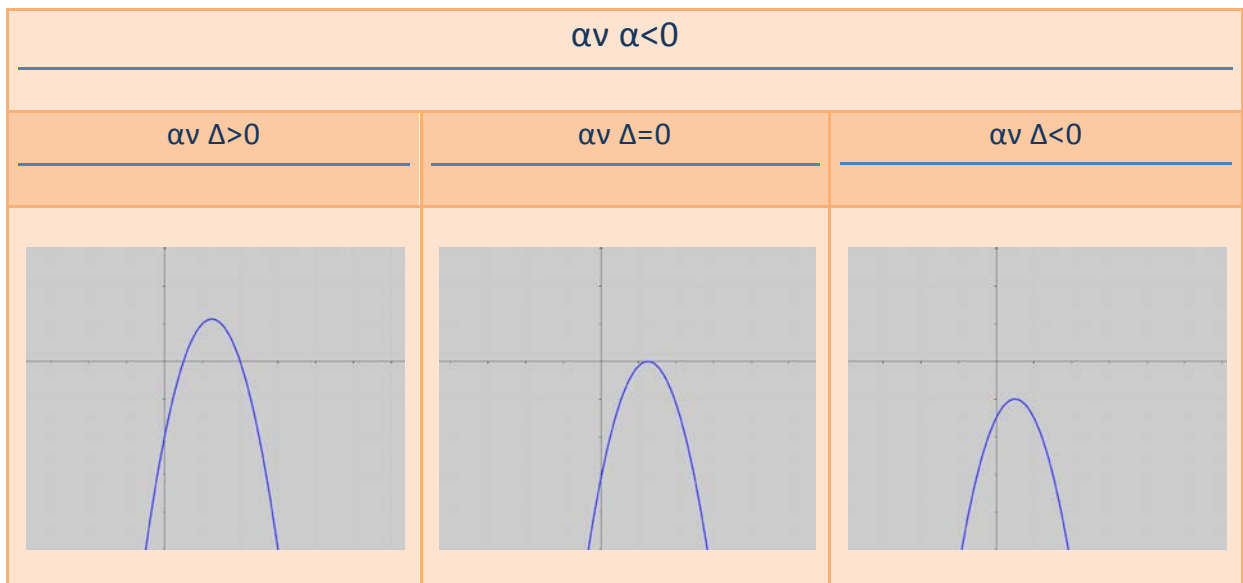
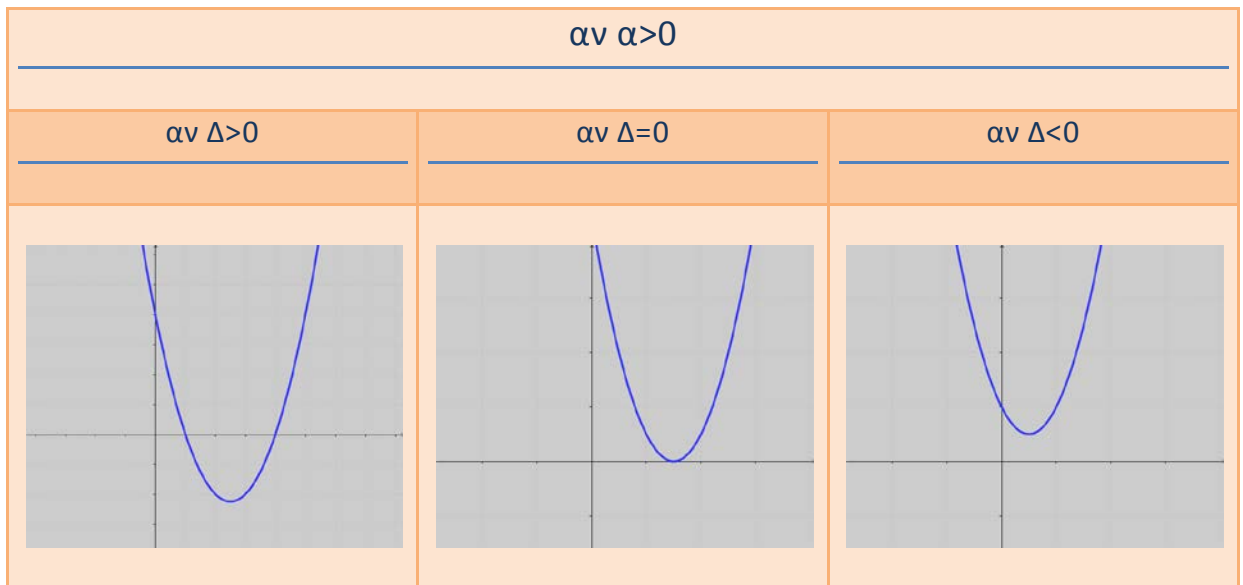
$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, σε σχέση με τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι:

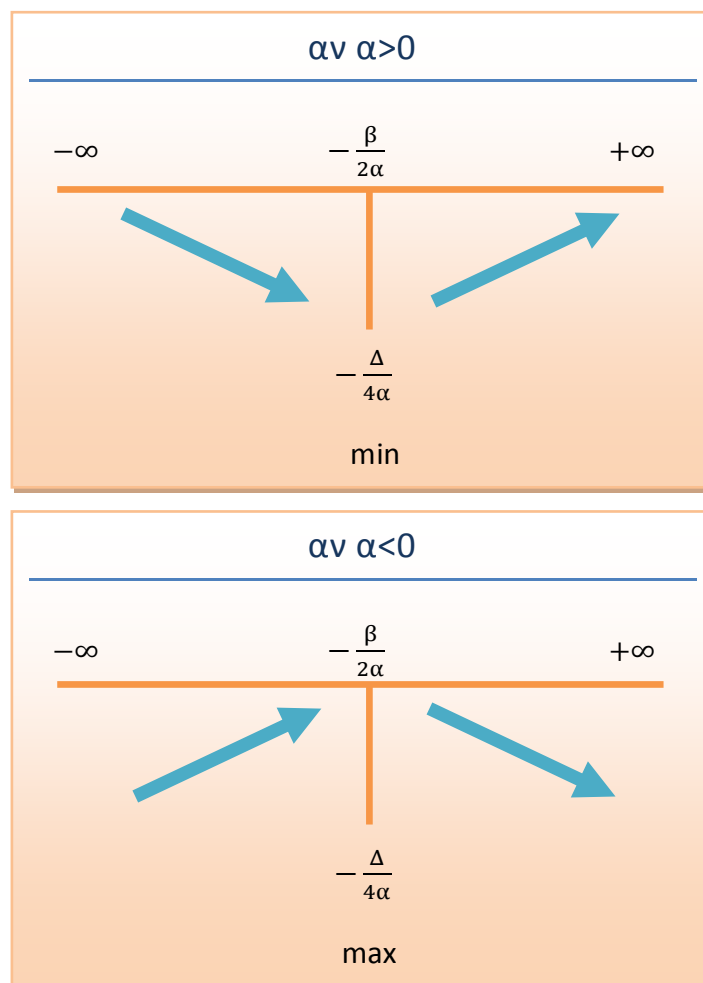
- ▶ Μετατοπισμένη κατά $\frac{b}{2a}$ μονάδες πιο αριστερά, αν $\frac{b}{2a} > 0$
- ▶ Μετατοπισμένη κατά $\frac{b}{2a}$ μονάδες πιο δεξιά, αν $\frac{b}{2a} < 0$
- ▶ Μετατοπισμένη κατά $-\frac{\Delta}{4a}$ πιο πάνω, αν $-\frac{\Delta}{4a} > 0$
- ▶ Μετατοπισμένη κατά $-\frac{\Delta}{4a}$ πιο κάτω, αν $-\frac{\Delta}{4a} < 0$
- ▶ Πιο «στενή», δηλαδή πιο απότομη όταν $|a| > 1$
- ▶ Πιο «ανοιχτή», δηλαδή πιο απλωμένη όταν $|a| < 1$
- ▶ Επιπλέον, αν $a < 0$ τότε η γραφική παράσταση έχει σχήμα αντίστροφο

➡ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει σχήμα παραβολής.

➡ Η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει την παρακάτω μορφή:



- ➡ Η μονοτονία της $f(x) = ax^2 + bx + c$ ακολουθεί τη μορφή που φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:



➡ Με δεδομένη τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και την ευθεία $y = \delta x + \epsilon$, και με ζητούμενο την εύρεση των (πιθανών) κοινών τους σημείων, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Ανάλογα με το πλήθος των λύσεων που προκύπτουν, έχουμε τις παρακάτω δυνατές γεωμετρικές ερμηνείες:

αν προκύψουν δύο σημεία	αν προκύψει ένα σημείο	αν δεν προκύψει σημείο
		
η ευθεία τέμνει την παραβολή	η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή	η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία

κεφάλαιο

5

A

πολυωνυμικές εξισώσεις ανώτερου βαθμού

τρόποι επίλυσης

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις έχουν μορφή:

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Για την επίλυσή τους δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη μέθοδος, αλλά διάφορες προτεινόμενες πορείες, που άλλοτε βοηθούν και άλλοτε όχι.

Η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος είναι η παρακάτω:

βήμα 1

- Προσδιορίζουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0 (για παράδειγμα αν ο σταθερός όρος είναι το 8, οι διαιρέτες του είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$)

βήμα 2

- Δοκιμάζουμε έναν-έναν τους διαιρέτες, αντικαθιστώντας την τιμή τους στο x . Αν κάποιος από αυτούς μηδενίσει το πολυώνυμο, σημαίνει ότι αποτελεί ρίζα (λύση) του πολυωνύμου.

βήμα 3

- Για την τιμή που προσδιορίσαμε να μηδενίζεται το πολυώνυμο, κάνουμε σχήμα Horner.

βήμα 4

- Γράφουμε σε παραγοντοποιημένη μορφή το πολυώνυμο.

βήμα 5

- Στο πολυώνυμο που λάβαμε ως πηλίκο από το σχήμα Horner, επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 4, ξεκινώντας αυτή τη φορά με δοκιμές που εξαιρούν όσες τιμές δεν μηδένισαν το αρχικό πολυώνυμο¹

¹ Αν για παράδειγμα ένας από τους διαιρέτες του σταθερού όρου του αρχικού πολυωνύμου ήταν ο αριθμός 2, και ενώ ελέγχθηκε, δεν μηδένιζε το πολυώνυμο, αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το 2 δεν αποτελεί ρίζα (λύση), ούτε του διαιρέτη που λάβαμε από το σχήμα Horner, επομένως το 2 δεν θα επανελεγχθεί.

B

σχήμα Horner

Το σχήμα Horner είναι μια χρήσιμη, εύκολη και γρήγορη μέθοδος για να προσδιορίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου οποιουδήποτε βαθμού, με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο διαιρέτης θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι της μορφής $ax + \beta$.

Για το σχήμα Horner χρησιμοποιούμε τους συντελεστές των πολυωνύμων. Αν κάποια ενδιάμεση δύναμη (μεταξύ του μονωνύμου της μέγιστης δύναμης και του σταθερού όρου) απουσιάζει, θεωρούμε ότι ο συντελεστής του συγκεκριμένου όρου είναι μηδέν (0) και ΔΕΝ ΠΑΡΑΛΕΙΠΕΤΑΙ.

Στη θέση του διαιρέτη χρησιμοποιούμε την τιμή του x που τον μηδενίζει, δηλαδή $-\frac{\beta}{\alpha}$.

παράδειγμα

Να προσδιοριστεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 2x - 4$ με το πολυώνυμο $Q(x) = x + 1$

λύση

Παρατηρούμε ότι στο πολυώνυμο $P(x)$, απουσιάζει το μονώνυμο του x^2 , επομένως ο συντελεστής του είναι 0.

Καταγράφουμε το Horner:

$$P(x) = 1x^3 + 0x^2 - 2x - 4 \quad Q(x) = x + 1$$

1		0		-2		-4	-1
↓	·(-1)	↓	·(-1)	↓	·(-1)	↓	
1		-1		-1		-5	

Αυτοί οι αριθμοί θα αποτελέσουν τους συντελεστές των όρων του πηλίκου. Το πηλίκο θα είναι κατά ένα βαθμό μικρότερο σε σχέση με τον διαιρετέο.

Αυτός ο τελευταίος αριθμός, αποτελεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x)$

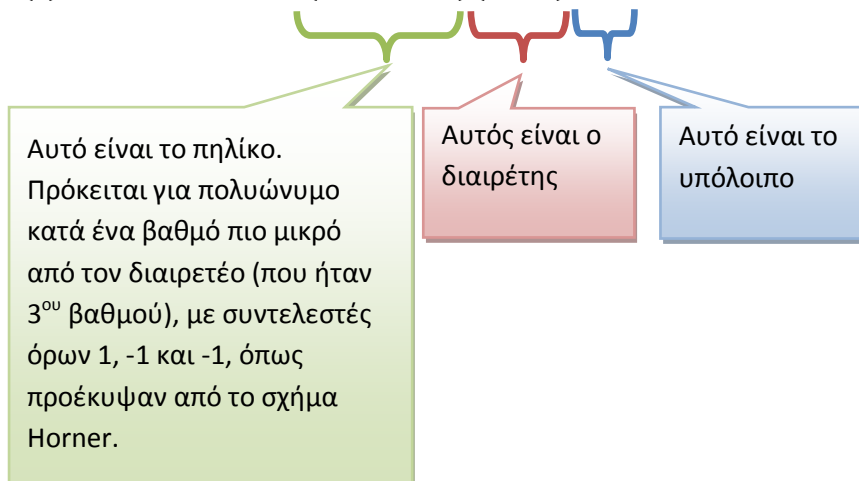
Εδώ βάζουμε την τιμή του x η οποία μηδενίζει τον διαιρέτη

Η λογική του Horner είναι η εξής:

Τον πρώτο από τους συντελεστές τον αφήνουμε αναλλοίωτο και απλώς τον «κατεβάζουμε». Από εκεί και πέρα, κάθε φορά που «ανηφορίζουμε», πολλαπλασιάζουμε με την τιμή του x που μηδενίζει τον διαιρέτη και κάθε φορά που κατεβαίνουμε προσθέτουμε στον αντίστοιχο συντελεστή, τον αριθμό που έχει προκύψει ακριβώς από κάτω του.

Με βάση λοιπόν αυτά, για τη συγκεκριμένη διαίρεση λάβαμε:

$$P(x) = x^3 - 2x - 4 = (x^2 - x - 1)(x + 1) - 5$$



Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων προκύψει μηδέν, τότε η διαίρεσή τους είναι τέλεια.

Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

Το $P(x)$ διαιρείται (ακριβώς) με το $x - \rho$	$P(\rho) = 0$	Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$	$P(x) \mid (x - \rho)$
---	---------------	--	------------------------

απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

βασικές έννοιες

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x , εκφράζει την απόσταση του αριθμού αυτού από το μηδέν. Επομένως τα αναμενόμενα αποτελέσματα της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού, είναι θετικά ή μηδέν (αφού δεν υπάρχει αρνητική απόσταση).

Έτσι, η απόλυτη τιμή του αριθμού 3, συμβολίζεται με $|3|$ και ισούται με 3, αφού η απόσταση του αριθμού 3 από το μηδέν είναι 3.

Όμοια, η απόλυτη τιμή του αριθμού -5, συμβολίζεται με $|-5|$ και ισούται με 5, αφού η απόσταση του αριθμού -5 από το μηδέν είναι 5.

Ο προσδιορισμός της απόλυτης τιμής αριθμών είναι εξαιρετικά απλός. Όμως ο υπολογισμός της απόλυτης τιμής ποσοτήτων που περιλαμβάνουν το x απαιτούν διερεύνηση. Αυτό οφείλεται στο ότι ανάλογα με τις τιμές του x , η ποσότητα μέσα στο απόλυτο, μπορεί άλλοτε να λαμβάνει θετικές τιμές, άλλοτε αρνητικές και άλλοτε να μηδενίζεται.

Το γενικό σκεπτικό της διερεύνησης φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.

βήμα 1

- Ελέγχουμε πότε η ποσότητα εντός του απολύτου είναι θετική, λύνοντας την ανίσωση: ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ > 0

βήμα 2α

- Για τις τιμές του x για τις οποίες η ποσότητα μέσα στο απόλυτο δίνει θετικά αποτελέσματα (ή μηδέν), η απόλυτη τιμή της ποσότητας ισούται με την ποσότητα χωρίς το απόλυτο.

βήμα 2β

- Για τις τιμές του x για τις οποίες η ποσότητα μέσα στο απόλυτο δίνει αρνητικά αποτελέσματα, η απόλυτη τιμή της ποσότητας ισούται με την αντίθετη της ποσότητας εντός του απολύτου

παράδειγμα

Να διερευνηθούν τα δυνατά αποτελέσματα της $|3 - 2x|$.

Λύση

(βήμα 1) Λύνουμε την ανίσωση $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

(βήμα 2α) Για $x \leq \frac{3}{2}$, έχουμε $|3 - 2x| = 3 - 2x$

(βήμα 2β) Για $x > \frac{3}{2}$, έχουμε $|3 - 2x| = -3 + 2x$

Επομένως συνοψίζοντας: $|3 - 2x| = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{όταν } x \leq \frac{3}{2} \\ -3 + 2x, & \text{όταν } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Ο ορισμός της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού x , είναι επομένως:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -x, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

B

ιδιότητες των απολύτων

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες των απολύτων, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

$$|a| \geq 0$$

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

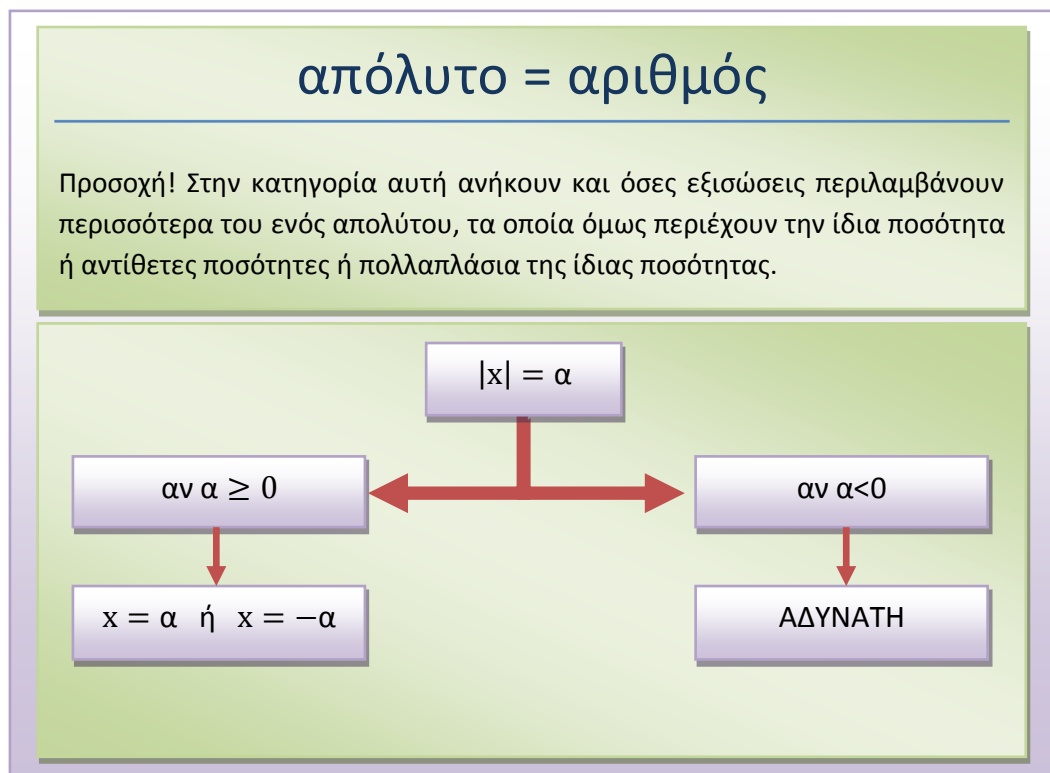
$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Όταν σε κάποια εξίσωση περιλαμβάνεται άγνωστος x μέσα σε απόλυτο, τότε ελέγχουμε σε ποια από τις παρακάτω κατηγορίες ανήκει και λύνουμε με βάση την προτεινόμενη ανά περίπτωση μέθοδο.

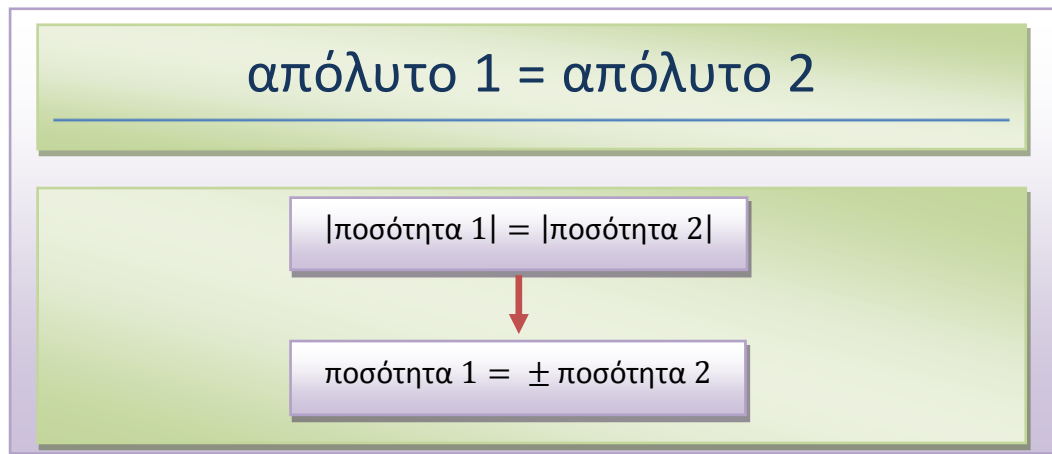
➡ **Περίπτωση 1^η**



παραδείγματα

- ▶ $|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 3$
- ▶ $|5 - 4x| = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 5 - 4x = 2 \Leftrightarrow & \text{ή } 5 - 4x = -2 \Leftrightarrow \\ -4x = 2 - 5 \Leftrightarrow & \text{ή } -4x = -2 - 5 \Leftrightarrow \\ -4x = -3 \Leftrightarrow & \text{ή } -4x = -7 \Leftrightarrow \\ x = \frac{3}{4} & \text{ή } x = \frac{7}{4} \end{array}$
- ▶ $|4x - 7| = -1 \Leftrightarrow \text{Αδύνατη}$

➡ Περίπτωση 2^η



παράδειγμα

$$\begin{array}{ll}
 \blacktriangleright |x - 2| = |3 - 2x| \Leftrightarrow & x - 2 = 3 - 2x \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad x - 2 = -3 + 2x \Leftrightarrow \\
 & x + 2x = 3 + 2 \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad x - 2x = -3 + 2 \Leftrightarrow \\
 & 3x = 5 \Leftrightarrow \quad \text{ή} \quad -x = -1 \Leftrightarrow \\
 & x = \frac{5}{3} \quad \quad \quad \text{ή} \quad x = 1
 \end{array}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και εξισώσεις της μορφής

απόλυτο 1 = αριθμός · απόλυτο 2

με την προϋπόθεση ο αριθμός να είναι θετικός.

Αν ο αριθμός είναι αρνητικός η εξίσωση είναι αδύνατη, με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση και οι δύο εντός απολύτων ποσότητες να μπορούν να μηδενιστούν ταυτόχρονα.

➡ Περίπτωση 3^η

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι εξισώσεις που έχουν δύο ή παραπάνω διαφορετικά απόλυτα (δηλαδή απόλυτα που δεν περιέχουν τις ίδιες, αντίθετες ή πολλαπλάσιες ποσότητες) **και** ποσότητες εκτός των απολύτων.

Όταν συμβαίνει αυτό αναλύουμε το κάθε απόλυτο και στη συνέχεια επιλύουμε την εξίσωση σε κάθε διάστημα χωριστά, με «πινακάκι».

παράδειγμα

► $|x - 3| - 2|1 - x| = 3x - 2$

Αναλύουμε το κάθε απόλυτο χωριστά:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{όταν } x > 3 \\ -x + 3, & \text{όταν } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{όταν } x \leq 1 \\ -1 + x, & \text{όταν } x > 1 \end{cases}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα τιμών:

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$ x - 3 $		$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$
$ 1 - x $		$1 - x$	$-1 + x$	$-1 + x$

Διακρίνουμε περιπτώσεις και για κάθε μία επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει:

► αν $x \leq 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} |x - 3| - 2|1 - x| &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ (-x + 3) - 2(1 - x) &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ -x + 3 - 2 + 2x &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ -x + 2x - 3x &= -3 + 2 - 2 \Leftrightarrow \\ -2x &= -3 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Η οποία απορρίπτεται αφού δεν πληροί τον περιορισμό $x \leq 1$.

► αν $1 < x \leq 3$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} |x - 3| - 2|1 - x| &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ (-x + 3) - 2(-1 + x) &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ -x + 3 + 2 - 2x &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ -x - 2x - 3x &= -2 - 3 - 2 \Leftrightarrow \\ -6x &= -7 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Η οποία είναι δεκτή, αφού βρίσκεται εντός ορίων του περιορισμού $1 < x \leq 3$.

► αν $x > 3$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} |x - 3| - 2|1 - x| &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ (x - 3) - 2(-1 + x) &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ x - 3 + 2 - 2x &= 3x - 2 \Leftrightarrow \\ x - 2x - 3x &= -2 + 3 - 2 \Leftrightarrow \\ -4x &= -1 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Η οποία απορρίπτεται, αφού δεν πληροί τον περιορισμό $x > 3$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

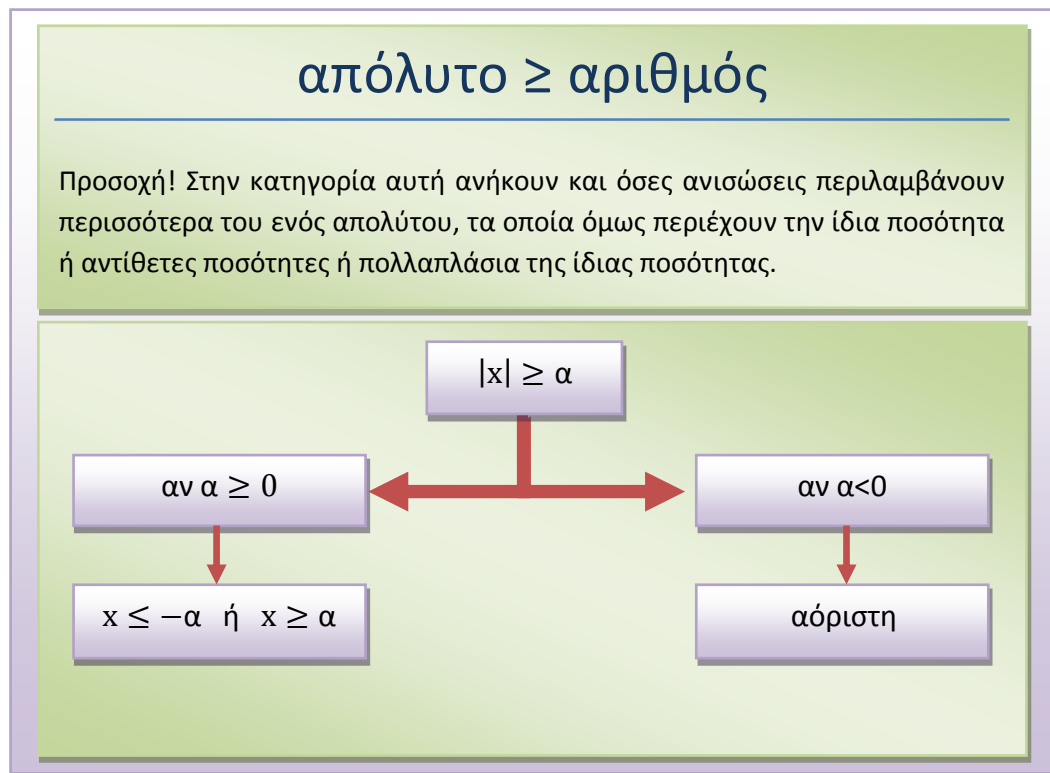
- Αν σε κάποιο στάδιο της διερεύνησης προκύψει αδύνατη εξίσωση, αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατη για αυτό και μόνο το στάδιο και όχι απαραίτητα συνολικά για όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Αν κατά την επίλυση κάποιας από τις υποπεριπτώσεις διαστημάτων προκύψει εξίσωση με άπειρες λύσεις, αυτό σημαίνει ότι ολόκληρο αυτό το διάστημα αποτελεί λύση της και όχι απαραίτητα όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.



ανισώσεις με απόλυτα

Όταν σε κάποια ανίσωση υπάρχει άγνωστος x μέσα σε απόλυτο, τότε για τη λύση της εφαρμόζουμε κάτι από τα παρακάτω:

➡ Περίπτωση 1^η



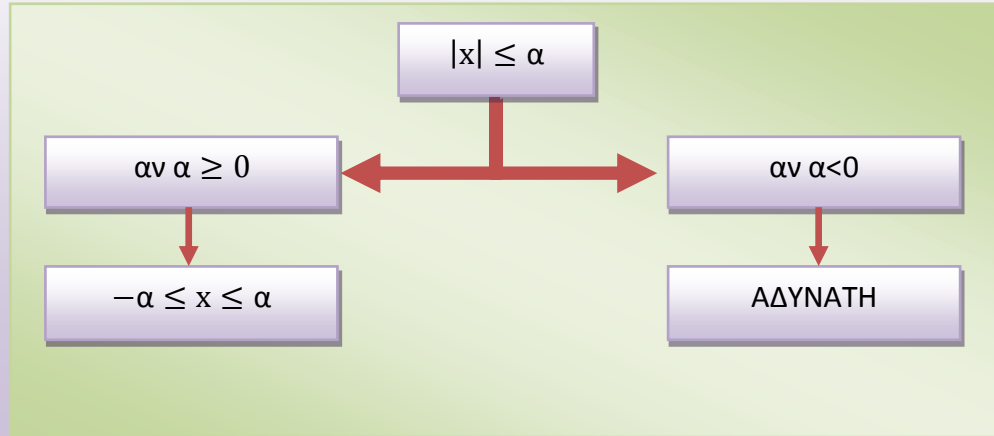
παραδείγματα

- ▶ $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ ή } x \geq 4$
- ▶ $|4 - 3x| \geq -7 \Leftrightarrow \text{αόριστη}$

➡ Περίπτωση 2^η

απόλυτο $\leq$ αριθμός

Προσοχή! Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και όσες ανισώσεις περιλαμβάνουν περισσότερα του ενός απολύτου, τα οποία όμως περιέχουν την ίδια ποσότητα ή αντίθετες ποσότητες ή πολλαπλάσια της ίδιας ποσότητας.



παραδείγματα

- ▶ $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$
- ▶ $|7 + 3x| \leq -5 \Leftrightarrow \text{αδύνατη}$

➡ Περίπτωση 3^η

Στην κατηγορία υπάγονται οι ανισώσεις που έχουν δύο ή παραπάνω διαφορετικά απόλυτα **και** ποσότητες εκτός των απολύτων.

Σε αυτή την περίπτωση αναλύουμε το κάθε απόλυτο χωριστά και επιλύουμε την ανίσωση σε κάθε διάστημα, ελέγχοντας αν οι λύσεις που προκύπτουν γίνονται ή όχι δεκτές από τον περιορισμό του κάθε διαστήματος.

Οι ανισώσεις αυτές ξεφεύγουν από την προτεινόμενη προς παράδοση ύλη, εντούτοις σε αρκετά σχολεία διδάσκονται.

Συχνά χρειάζεται να μετατρέψουμε μια έκφραση δοσμένη με μορφή απόλυτης τιμής, σε έκφραση απόστασης από το μηδέν ή σε μορφή διαστήματος τιμών. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ισοδυναμία μετατροπής της μιας μορφής έκφρασης στην άλλη.

Έκφραση με απόλυτο	Έκφραση με απόσταση	Έκφραση με διάστημα
$ x = \beta$	$d(x, 0) = \beta$	$x = \beta$ ή $x = -\beta$
$ x - \alpha = \beta$	$d(x, \alpha) = \beta$	$x = \beta + \alpha$ ή $x = -\beta + \alpha$
$ x - \alpha > \beta$	$d(x, \alpha) > \beta$	$x \in (-\infty, -\beta + \alpha) \cup (\beta + \alpha, +\infty)$
$ x - \alpha \geq \beta$	$d(x, \alpha) \geq \beta$	$x \in (-\infty, -\beta + \alpha] \cup [\beta + \alpha, +\infty)$
$ x - \alpha < \beta$	$d(x, \alpha) < \beta$	$x \in (-\beta + \alpha, \beta + \alpha)$
$ x - \alpha \leq \beta$	$d(x, \alpha) \leq \beta$	$x \in [-\beta + \alpha, \beta + \alpha]$

Στα παραπάνω, πρέπει να ισχύει: $\beta \geq 0$.

συστήματα γραμμικών εξισώσεων

βασικές έννοιες

Γραμμικά, λέγονται τα συστήματα εξισώσεων στα οποία οι άγνωστοι εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη. Τα γραμμικά συστήματα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, τα ονομάζουμε συστήματα 2×2 .

Η γενική μορφή που έχει ένα σύστημα 2×2 είναι:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \varepsilon \\ \gamma x + \delta y = \zeta \end{cases}$$

όπου τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$.

Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να λυθεί με διάφορους τρόπους. Πριν ξεκινήσουμε όμως τη λύση του πρέπει να το φέρουμε στην παραπάνω μορφή (στην οποία στο πρώτο μέλος των εξισώσεων έχουμε τους αγνώστους και στο δεύτερο τους γνωστούς και μάλιστα το x είναι κάτω από το α και το y κάτω από το β).

Στη μέθοδο αντικατάστασης ακολουθούμε την παρακάτω πορεία επίλυσης

βήμα 1

- λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο.
(συνήθως επιλέγουμε την πιο "βολική"¹ εξίσωση και τον πιο "βολικό" άγνωστο, ώστε να αποφύγουμε τη δημιουργία περίπλοκων παραστάσεων)

βήμα 2

- αντικαθιστούμε αυτόν τον άγνωστο, ως προς τον οποίο λύσαμε τη μία εξίσωση, στην άλλη εξίσωση

βήμα 3

- αυτή η δεύτερη εξίσωση πλέον, έχει μόνο έναν άγνωστο και έτσι αφού τη λύσουμε, προσδιορίζουμε την τιμή του

βήμα 4

- τέλος, αντικαθιστούμε σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις του συστήματος τον άγνωστο που βρήκαμε και υπολογίζουμε την τιμή και του άλλου

¹ Ως «βολική» χαρακτηρίζεται η εξίσωση, η οποία όταν λυθεί ως προς τον έναν άγνωστο ή δεν δημιουργεί κλάσματα ή δημιουργεί κλάσματα με μικρούς παρονομαστές.

παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

πιο «βολική» δείχνει η πρώτη εξίσωση, την οποία θα λύσουμε ως προς y

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x - 5(-1 - 3x) = -14 \end{cases}$$

αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση, όπου y το $-1 - 3x$

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x + 5 + 15x = -14 \end{cases}$$

η δεύτερη εξίσωση έχει πλέον μοναδικό άγνωστο το x , οπότε και την λύνουμε

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x + 5 + 15x = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 19x = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ \frac{19}{19}x = \frac{-19}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ x = -1 \end{cases}$$

η τιμή του x έχει προσδιοριστεί. Για να υπολογίσουμε και το y , αντικαταστούμε στην πρώτη εξίσωση, όπου x το -1

$$\begin{cases} y = -1 - 3(-1) \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Επομένως η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (-1, 2)$.

Γ

μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Για την επίλυση ενός συστήματος με αυτή τη μέθοδο, ακολουθούμε την παρακάτω πορεία επίλυσης.

βήμα 1

- Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με το συντελεστή του x της δεύτερης εξίσωσης
- Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με τον **αντίθετο** από τον συντελεστή του x της πρώτης

βήμα 2

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (οπότε προκύπτει μια νέα εξίσωση με ένα άγνωστο, την οποία συνδυάζουμε με οποιαδήποτε από τις προηγούμενες μας εξυπηρετεί

βήμα 3

- Επιλύουμε την εξίσωση με τον ένα άγνωστο και ό,τι βρούμε το αντικαθιστούμε στην άλλη

παρατηρήσεις

- ➡ Μπορούμε αντί για τους δύο συντελεστές του x , να χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση του συστήματος τους συντελεστές του y .
- ➡ Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με τον **αντίθετο** του συντελεστή του x της δεύτερης, και την δεύτερη εξίσωση με τον συντελεστή του x της πρώτης.
- ➡ Αν οι συντελεστές του x (ή του y) είναι από την αρχή αντίθετοι (δηλαδή πριν πολλαπλασιάσουμε) προσθέτουμε κατ' ευθείαν τις εξισώσεις.

παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

λύση

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

Εξυπηρετεί καλύτερα να δουλέψουμε με τους συντελεστές του y . Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -5 και την δεύτερη με -1 (τον αντίθετο του 1).

$$\begin{cases} (-5) \cdot 3x + y = -1 \\ (-1) \cdot 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

$$(+)\begin{cases} -15x - 5y = 5 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και ως δεύτερη εξίσωση κρατάμε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες

$$\begin{cases} -19x = 19 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-19}{-19}x = \frac{19}{-19} \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

Προσδιορίσαμε το x . Τώρα θα το αντικαταστήσουμε στην δεύτερη εξίσωση

$$\begin{cases} x = -1 \\ -4(-1) + 5y = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ 4 + 5y = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ 5y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ \frac{5}{5}y = \frac{10}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

δηλαδή η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (-1, 2)$.

Για ένα γραμμικό σύστημα 2×2

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \varepsilon \\ \gamma x + \delta y = \zeta \end{cases}$$

η ορίζουσα είναι

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$$

Εκτός από την ορίζουσα D , το σύστημα έχει επιπλέον τις ορίζουσες D_x και D_y . Για τον υπολογισμό της D_x , αντικαθιστούμε στην D τους συντελεστές του x , με τους σταθερούς όρους και για την D_y τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους. Οπότε:

$$D_x = \begin{vmatrix} \varepsilon & \beta \\ \zeta & \delta \end{vmatrix} = \varepsilon \cdot \delta - \beta \cdot \zeta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \zeta - \varepsilon \cdot \gamma$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών ακολουθούμε την παρακάτω πορεία :

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος

Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία λύση, την

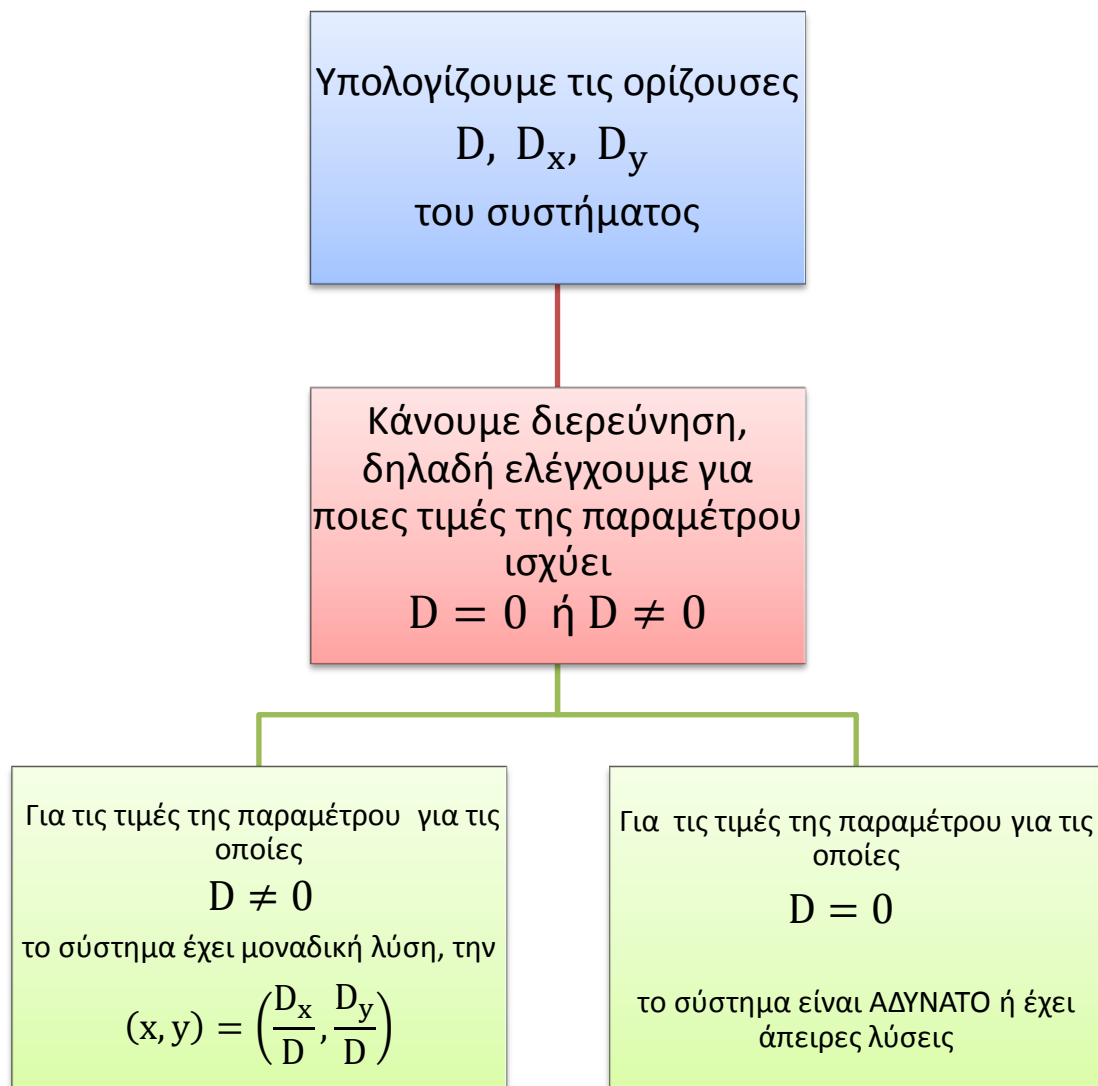
$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$$

Αν $D=0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

Αν $D=0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$ το σύστημα έχει ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ¹

¹ Εκτός αν $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ και $\varepsilon \neq 0$ ή $\zeta \neq 0$ οπότε είναι αδύνατο

Παραμετρικά λέγονται τα συστήματα στα οποία εκτός από τους δύο αγνώστους υπάρχει και άλλο γράμμα (συνήθως λ) που ονομάζεται παράμετρος. Και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις παραμετρικές εξισώσεις, η παράμετρος δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως άγνωστος. Πρόκειται για ένα γράμμα, που ανάλογα με την τιμή του, τροποποιείται η ικανότητα ενός συστήματος να λυθεί. Έτσι ενδεχομένως για κάποιες τιμές της παραμέτρου, το σύστημα να δίνει μία μοναδική λύση, ενώ κάποιες άλλες τιμές της να καθιστούν το σύστημα αδύνατο ή με άπειρες λύσεις. Τα παραμετρικά συστήματα λύνονται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών, με βάση την παρακάτω πορεία:



παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

λύση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$$

Κάνουμε διερεύνηση:

➡ Αν $D \neq 0$ δηλαδή αν $\lambda(\lambda - 2) \neq 0$ οπότε $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (\lambda - 1) + \lambda = -(\lambda - 2)$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 \cdot (2 - \lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

οπότε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\frac{1}{\lambda}$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda^2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\lambda$$

άρα

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda \right)$$

➡ Αν $D=0$ δηλαδή αν $\lambda=0$ ή $\lambda=2$ έχουμε:

► αν $\lambda=0$ το σύστημα με αντικατάσταση δίνει $\begin{cases} -y = -1 \\ -2y = 0 \end{cases}$ οπότε έχουμε $\begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ που δεν μπορεί να ισχύει, επομένως το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

► αν $\lambda=2$ το σύστημα με αντικατάσταση δίνει $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ οπότε έχουμε

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

επομένως:

$$\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $0x + 0y = 0$. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς τον ένα άγνωστο, οπότε:
 $y = 2x - 1$.

Άρα η μορφή³ των άπειρων λύσεων του συστήματος είναι:

$$(x, y) = (x, 2x - 1)$$

με $x \in \mathbb{R}$.

³ Στα συστήματα με άπειρες λύσεις, δεν αρκεί να αναφέρουμε ότι το πλήθος των λύσεων είναι άπειρο. Θα πρέπει να αναφέρουμε τη μορφή που έχουν οι άπειρες λύσεις. Στο παράδειγμα που δόθηκε, το ζεύγος τιμών $(x, y) = (5, 9)$ αποτελεί λύση, αφού υπακούει στη μορφή $(x, y) = (x, 2x - 1)$, ενώ το ζεύγος τιμών $(x, y) = (3, 7)$ δεν αποτελεί λύση του συστήματος (επομένως δεν ανήκει στις άπειρες λύσεις), αφού δεν επαληθεύει τη μορφή $(x, y) = (x, 2x - 1)$. Σε αντίθεση λοιπόν με μια εξίσωση απείρων λύσεων, στην οποία οποιαδήποτε τιμή του x την επαληθεύει, ένα σύστημα άπειρων λύσεων επαληθεύεται για συγκεκριμένη μορφή άπειρων ζευγών λύσεων.

τριγωνομετρία

βασικές έννοιες

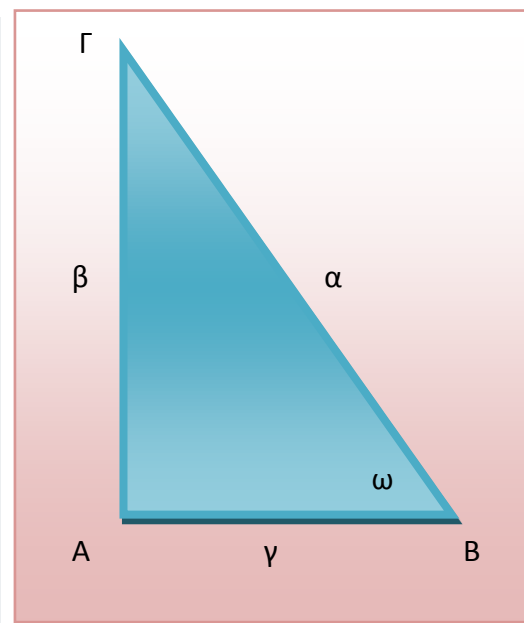
Στην τριγωνομετρία χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$



π.χ. για το τρίγωνο του σχήματος έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\beta}{\alpha}, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}, \epsilon\phi\omega = \frac{\beta}{\gamma} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

B

τριγωνομετρικοί αριθμοί χρήσιμων γωνιών

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων χρήσιμων γωνιών.

Γωνιά σε μοίρες	Γωνιά σε ακτίνια (rad)	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται	0

Για να μετατρέψουμε μια γωνία από μοίρες σε ακτίνια ή το αντίστροφο χρησιμοποιούμε τη σχέση:

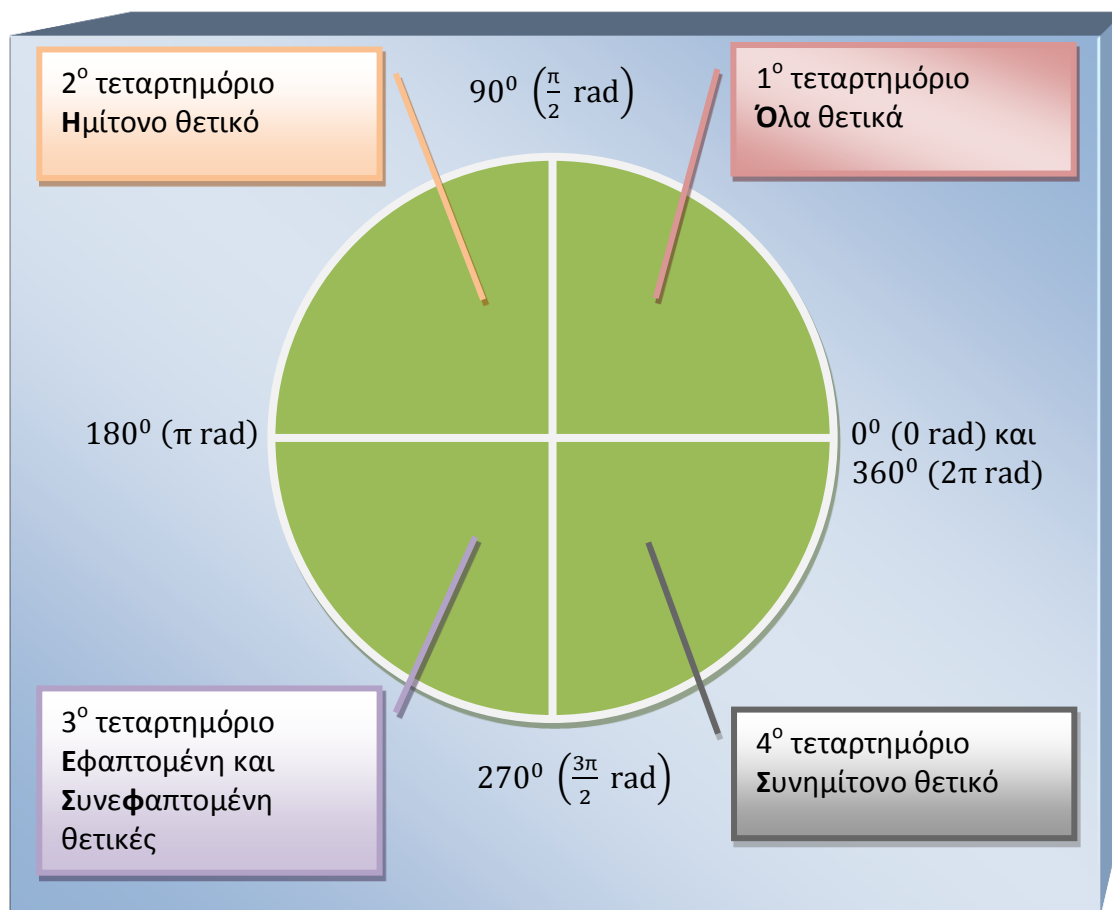
$$\frac{2\pi}{\text{ακτίνια}} = \frac{360^{\circ}}{\text{μοίρες}}$$

Γ

αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Τα βήματα για να προσδιορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που υπερβαίνουν τις $90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} \right)$, είναι τα παρακάτω:

- ➡ (*) Αφαιρούμε τους κύκλους που μπορεί να περιέχονται στη δοσμένη γωνία. Αυτονόητο είναι πως αν η γωνία δεν υπερβαίνει τον ένα κύκλο, το στάδιο αυτό παρακάμπτεται.
- ➡ Προσδιορίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο τερματίζει η δοσμένη γωνία. Αυτό το τεταρτημόριο, καθορίζει τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας μας, σύμφωνα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



- ➡ Ανάλογα με το τεταρτημόριο τερματισμού, η αρχική (παλαιά) γωνία τροποποιείται σε μια νέα γωνία, με βάση τον πίνακα:

Γωνίες στο 1 ^ο τεταρτημόριο	Ειδικά για τις γωνίες αυτές: νέα γωνία = $\frac{\pi}{2}$ - παλιά γωνία (νέα γωνία = 90° - παλιά γωνία) ΑΛΛΑ ΚΑΙ: ημ $\longleftrightarrow$ συν εφ $\longleftrightarrow$ σφ
Γωνίες στο 2 ^ο τεταρτημόριο	νέα γωνία = π - παλιά γωνία (νέα γωνία = 180° - παλιά γωνία)
Γωνίες στο 3 ^ο τεταρτημόριο	νέα γωνία = παλιά γωνία - π (νέα γωνία = παλιά γωνία - 180°)
Γωνίες στο 4 ^ο τεταρτημόριο	νέα γωνία = 2π - παλιά γωνία (νέα γωνία = 360° - παλιά γωνία)



τριγωνομετρικές ταυτότητες

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες δεν διαφέρουν από τις γνωστές ταυτότητες της Άλγεβρας, μόνο που περιλαμβάνουν και τριγωνομετρικούς αριθμούς. Στη θέση του γράμματος (γωνίας) που περιέχουν (μπορεί να είναι και περισσότερα του ενός γράμματος), μπορούμε να αντικαθιστούμε μια τιμή. Στο ίδιο γράμμα μέσα στην ισότητα, αντικαθιστούμε πάντα την ίδια τιμή, πχ. όπου βλέπουμε α στην ταυτότητα μπορούμε να αντικαθιστούμε τις 30° , ενώ όπου βλέπουμε β τις 42° .

ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες χρησιμοποιούνται και για γωνίες εκφρασμένες σε μοίρες, και για γωνίες εκφρασμένες σε rad (ακτίνια).

Χρειάζεται επίσης να αναφερθεί ότι στη θέση του γράμματος (ή των γραμμάτων) που περιέχει μια τριγωνομετρική ταυτότητα, μπορούμε να αντικαθιστούμε και εγγράμματος ποσότητες. Για παράδειγμα στη θέση του ω μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 2x.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Κάποιες ταυτότητες δεν έχουν νόημα για ορισμένες τιμές των γωνιών που περιέχουν. Για παράδειγμα στην εφελκτομένη, δεν μπορεί η γωνία να είναι 90° .

βασικές

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{1}{\sigma\phi\omega}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{1}{\epsilon\phi\omega}$$

$$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$$

τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta} \text{ με } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta} \text{ με } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha} \text{ με } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta} \text{ με } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \sin^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$$

$$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} \text{ με } \alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha} \text{ με } \alpha \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γωνία	ημω	συνω	εφω	σφω	γωνία	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0,0000	1,0000	0,0000		46°	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	47°	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	48°	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0812	49°	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	50°	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	51°	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	52°	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1444	53°	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	54°	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	55°	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	56°	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	57°	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	58°	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	59°	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	60°	0,8660	0,5000	1,7320	0,5774
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	61°	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	62°	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	63°	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	64°	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	65°	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	66°	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	67°	0,9205	0,3907	2,3558	0,4245
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68°	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	69°	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	70°	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	71°	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	72°	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	73°	0,9563	0,2924	3,2708	0,3057
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	74°	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	75°	0,9659	0,2588	3,7320	0,2680
30°	0,5000	0,8660	0,5773	1,7321	76°	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	77°	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	78°	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	79°	0,9816	0,1908	5,1445	0,1944
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	80°	0,9848	0,1736	5,6712	0,1763
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	81°	0,9877	0,1564	6,3137	0,1584
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	82°	0,9903	0,1392	7,1153	0,1405
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	83°	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	84°	0,9945	0,1045	9,5143	0,1051
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	85°	0,9962	0,0872	11,4299	0,0875
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	86°	0,9976	0,0698	14,3004	0,0699
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	87°	0,9986	0,0523	19,0807	0,0524
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	88°	0,9994	0,0349	28,6352	0,0349
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	89°	0,9998	0,0175	57,2857	0,0175
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	90°	1,0000	0,0000		0,0000
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000					

ΣΤ

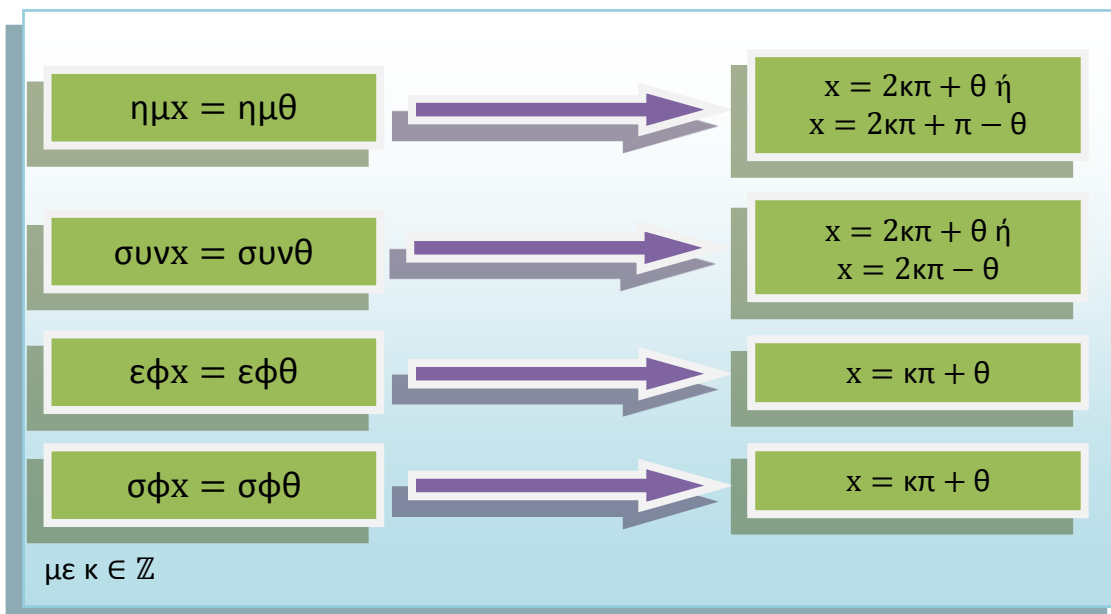
τριγωνομετρικές εξισώσεις

Τριγωνομετρικές καλούνται οι εξισώσεις που έχουν άγνωστο (x), μέσα σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό. Αυτό που πρέπει να κάνουμε εμείς, είναι να προσδιορίσουμε την τιμή (ή συνηθέστερα τη *μορφή των τιμών*¹) του αγνώστου, δηλαδή τη γωνία που επαληθεύει την εξίσωση.

ΣΤ 1

βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Παρακάτω δίνονται οι βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις, με τις αντίστοιχες λύσεις τους:

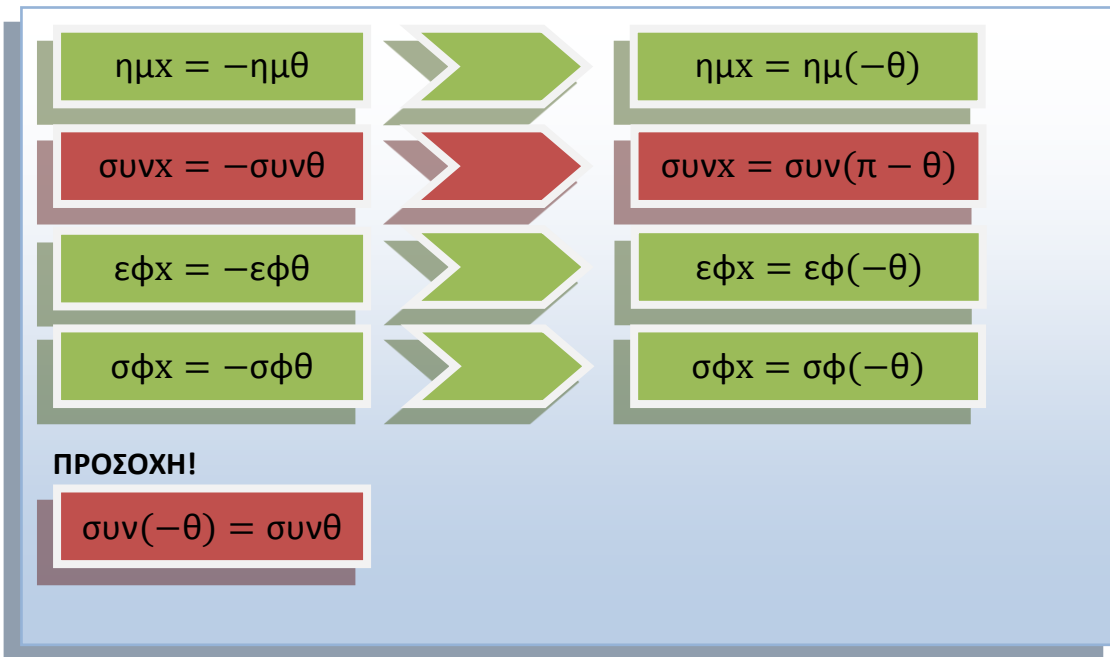


¹ Συνήθως οι λύσεις μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι άπειρες, γιατί άπειρες είναι οι γωνίες που έχουν ίδιες τιμές τριγωνομετρικών αριθμών. Αφού λοιπόν δεν μπορούμε να γράψουμε μία-μία όλες τις λύσεις τους (δεν θα τελειώναμε ποτέ!), δίνουμε μια σχέση που «περιγράφει» τις λύσεις.

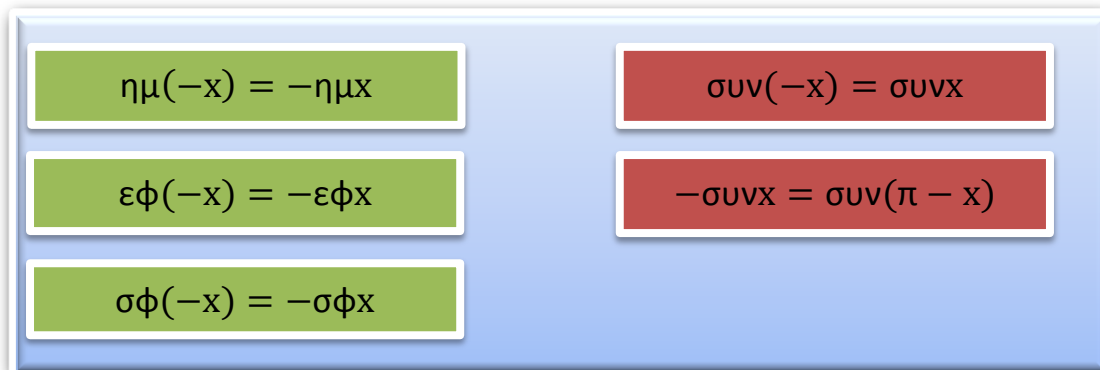
ΣΤ 2

τριγωνομετρικές εξισώσεις με μείον

Όταν μπροστά από κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό σε μια τριγωνομετρική εξίσωση, υπάρχει αρνητικό πρόσημο και θέλουμε να το εξαφανίσουμε (για να έρθει η εξίσωση στη μορφή των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων), ακολουθούμε τους κανόνες του παρακάτω διαγράμματος:



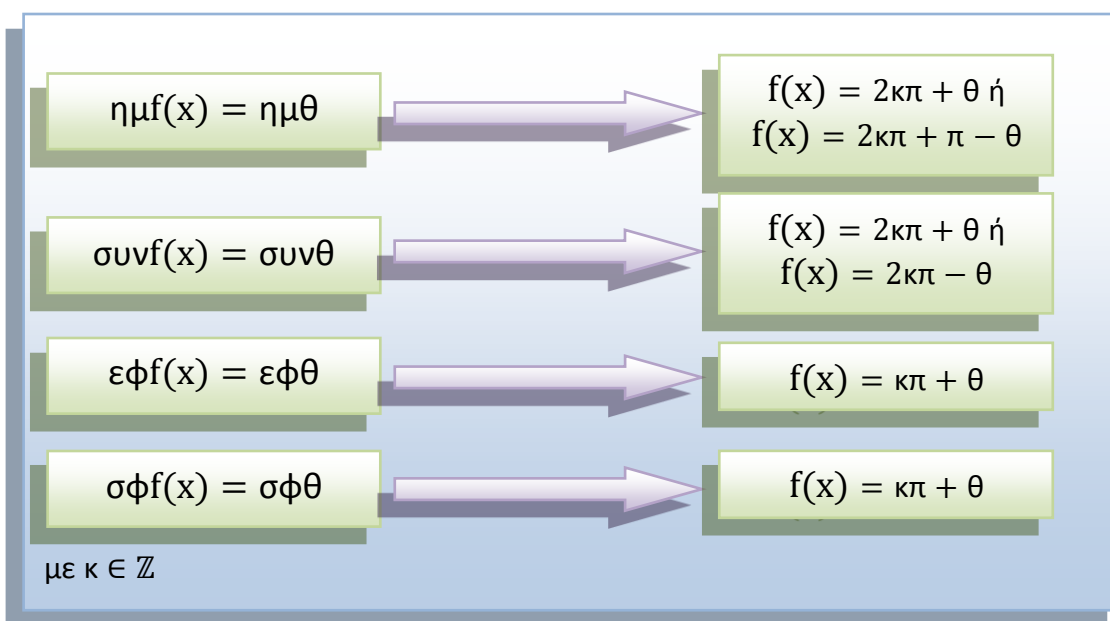
Τα παραπάνω βασίζονται στις ακόλουθες ιδιότητες:



ΣΤ 3

τριγωνομετρικές εξισώσεις με σύνθετες
εκφράσεις του x

Πρόκειται για τριγωνομετρικές εξισώσεις, στις οποίες αντί για x , στον έναν ή και στους δύο εμφανιζόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς, περιέχονται πιο σύνθετες εκφράσεις. Δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις, εντούτοις βοηθητικό για την επίλυσή τους είναι το επόμενο διάγραμμα:



Ενδεχομένως και το θ να είναι έκφραση του x . Σε αυτή την περίπτωση, αφού εφαρμόσουμε όσα αναφέρει ο παραπάνω πίνακας, λύνουμε την εξίσωση που έχει προκύψει ως προς x .

ΣΤ 4

τριγωνομετρικές εξισώσεις αλγεβρικής μορφής

Υπάρχουν τριγωνομετρικές εξισώσεις, που η λύση τους βασίζεται σε πρώτη φάση σε επίλυση κλασικής πολυωνυμικής εξίσωσης της άλγεβρας. Συνηθισμένες τακτικές αντιμετώπισης τέτοιων εξισώσεων, είναι αυτές που προτείνονται παρακάτω:

Αντικαθιστούμε τον πολλαπλά εμφανιζόμενο τριγωνομετρικό αριθμό με y .



π.χ. η εξίσωση $\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 1 = 0$ με αντικατάσταση του $\eta\mu x$ με y , δίνει $y^2 - 2y + 1 = 0$.

Εφαρμόζουμε κάποια από τις συνηθισμένες μαθηματικές συνθήκες.



π.χ. η εξίσωση $(2\eta\mu x + 1) \cdot (\sqrt{3}\epsilon\phi x - 1) = 0$ δίνει $2\eta\mu x + 1 = 0$ ή $\sqrt{3}\epsilon\phi x - 1 = 0$.

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $x^y = a$.



π.χ. η εξίσωση $\epsilon\phi^2 x = 3$ δίνει $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ ή $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$

Επίσης χρήσιμες είναι οι μετατροπές:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\epsilon\phi x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sigma\phi x = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x}$$

$$\sigma\phi x = \frac{1}{\epsilon\phi x}$$

Z

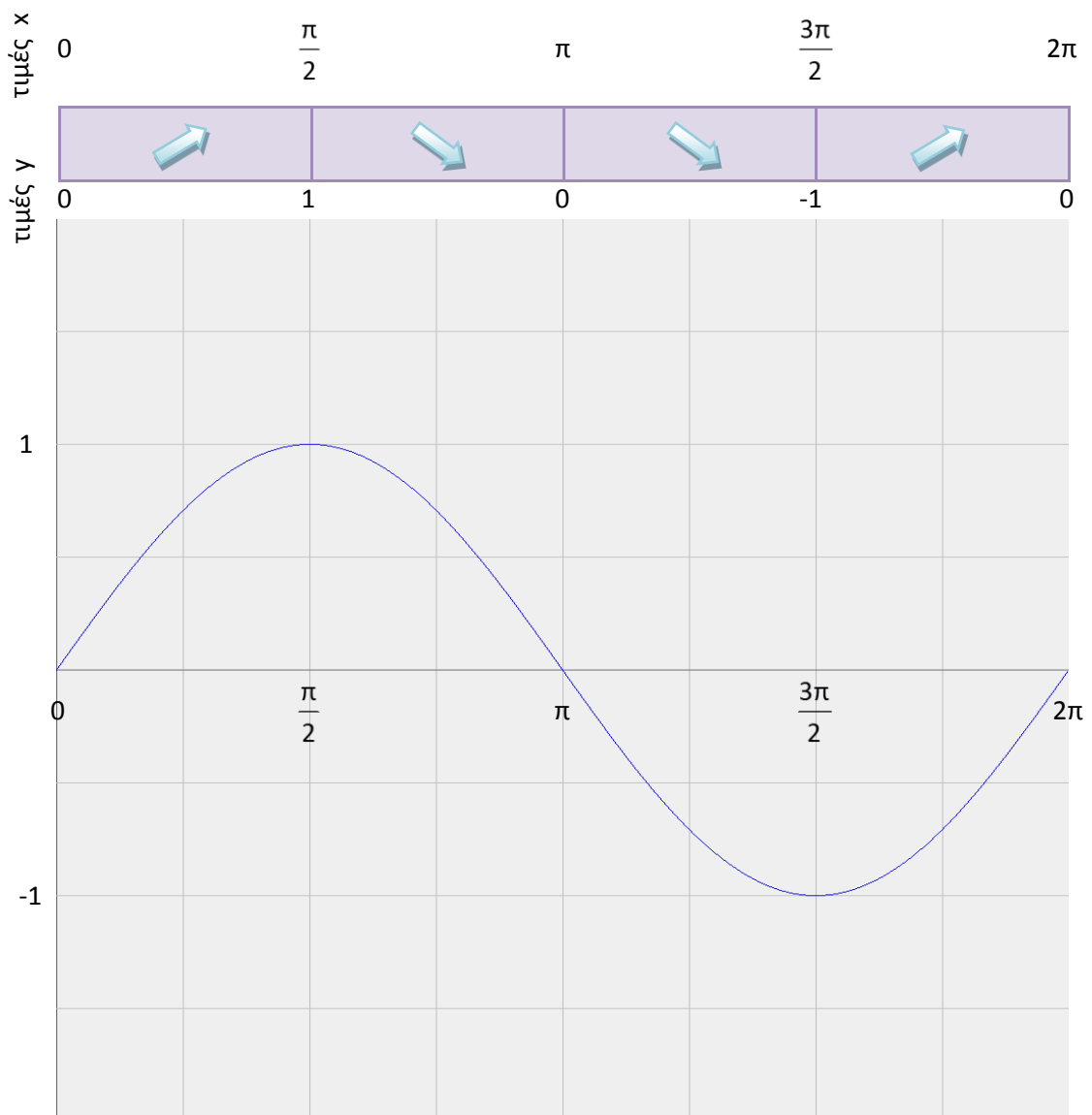
τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Z 1

η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,1]$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T=2\pi$
- η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:



Ζ 2

η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

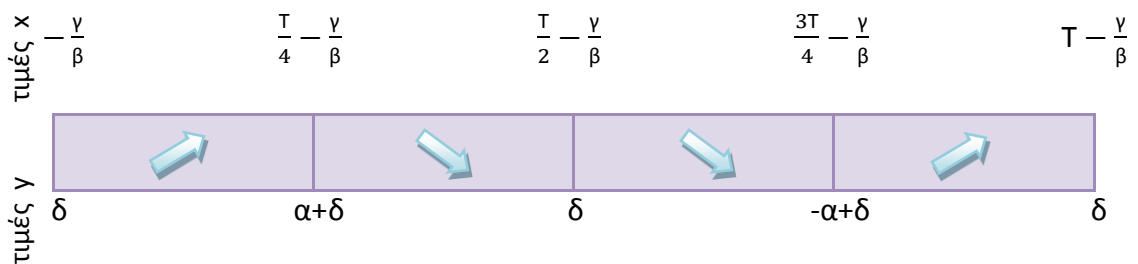
Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-|\alpha| + \delta, |\alpha| + \delta]$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$
- είναι μετατοπισμένη κατά:

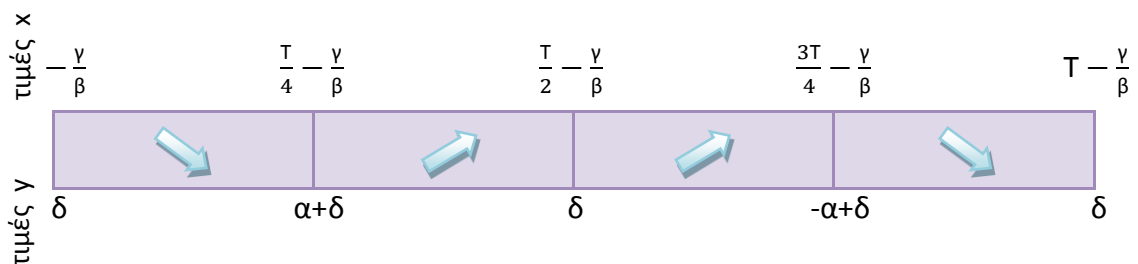
$|\gamma|$ προς τα αριστερά σε σχέση με την $f(x) = \eta\mu x$, αν $\gamma > 0$

$|\gamma|$ προς τα δεξιά σε σχέση με την $f(x) = \eta\mu x$, αν $\gamma < 0$

- Αν $\alpha > 0$, τότε η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:



- Αν $\alpha < 0$, τότε η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:

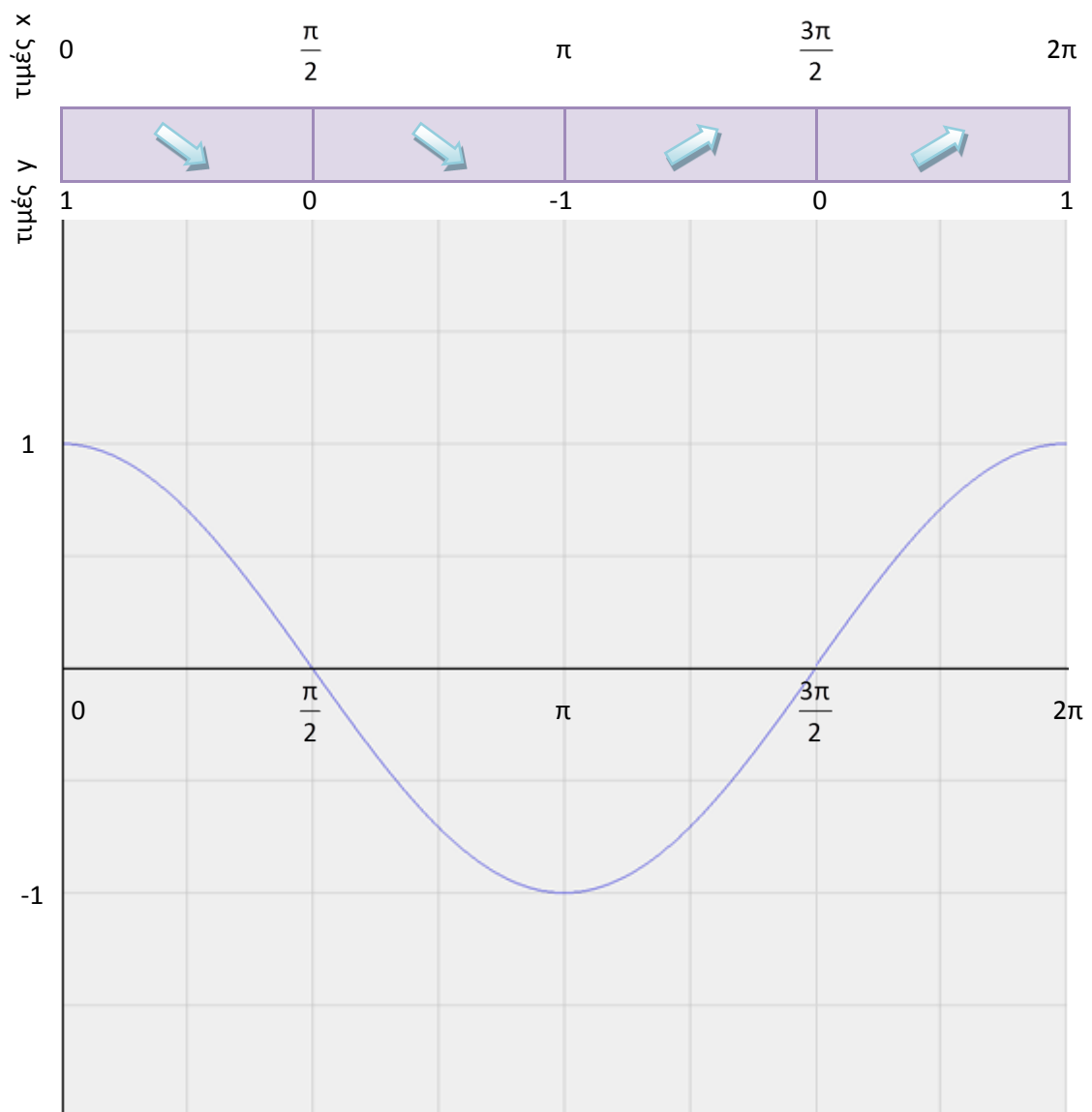


Ζ 3

η συνάρτηση $f(x)=\sin x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,1]$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T=2\pi$
- η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:



Ζ 4

η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

Για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$, χρησιμοποιούμε τις γνώσεις μας για τη μελέτη της $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$ (παράγραφος Ζ 2). Συγκεκριμένα μετατρέπουμε την αρχικά δοσμένη $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$, με βάση το παρακάτω σκεπτικό:

$$f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta \cdot x - \gamma\right) + \delta = -\alpha \cdot \sin\left(\beta \cdot x + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \delta$$

Ζ 5

η συνάρτηση $f(x) = \tan x$

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$,

- έχει πεδίο ορισμού $x \neq \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$
- είναι γνήσια αύξουσα και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Ζ 6

η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$,

- έχει πεδίο ορισμού $x \neq \kappa \cdot \pi$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T=\pi$
- είναι γνήσια φθίνουσα και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω:



κεφάλαιο

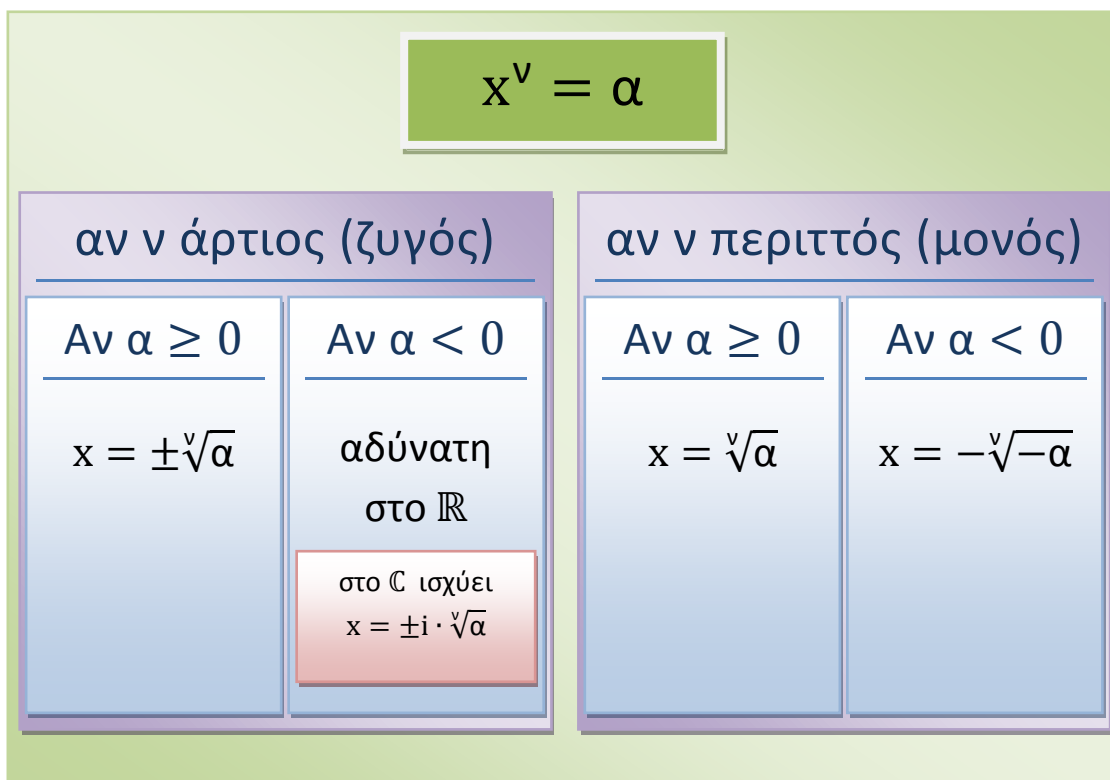
9

ειδική περίπτωση εξίσωσης και
ανίσωσης νιοστού βαθμού

A

επίλυση της εξίσωσης $x^v = \alpha$

Η εξίσωση νιοστού βαθμού (v θετικός ακέραιος) της μορφής $x^v = \alpha$ λύνεται με βάση το παρακάτω διάγραμμα.



B

επίλυση της ανίσωσης $x^n \geq \alpha$

Η ανίσωση νιοστού βαθμού (n θετικός ακέραιος) της μορφής $x^n \geq \alpha$ λύνεται με βάση το παρακάτω διάγραμμα.

$x^n \geq \alpha$	αν n άρτιος (ζυγός)	
	Αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha < 0$
	$x \leq -\sqrt[n]{\alpha}$ ή $x \geq \sqrt[n]{\alpha}$	αόριστη
	αν n περιττός (μονός)	
	Αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha < 0$
	$x \geq \sqrt[n]{\alpha}$	$x \geq -\sqrt[n]{-\alpha}$

Γ

επίλυση της ανίσωσης $x^n \leq \alpha$

Η ανίσωση νιοστού βαθμού (n θετικός ακέραιος) της μορφής $x^n \leq \alpha$ λύνεται με βάση το παρακάτω διάγραμμα.

$x^n \leq \alpha$	αν n άρτιος (ζυγός)	
	Αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha < 0$
	$-\sqrt[n]{\alpha} \leq x \leq \sqrt[n]{\alpha}$	αδύνατη
	αν n περιττός (μονός)	
	Αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha < 0$
	$x \leq \sqrt[n]{\alpha}$	$x \leq -\sqrt[n]{-\alpha}$

εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

εκθετική συνάρτηση

Εκθετικές ονομάζονται οι συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή βρίσκεται στον εκθέτη ενός θετικού αριθμού.

Μορφή: $f(x) = a^x$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$

Σύνολο τιμών: $(0, +\infty)$

Η εκθετική είναι συνάρτηση "1-1", επομένως ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \xrightarrow{"1-1"} x_1 = x_2$$

Κοινό σημείο με άξονα γ'γ: $A(0,1)$

αν $0 < a < 1$

αν $a > 1$

Μονοτονία: γνήσια φθίνουσα

Μονοτονία: γνήσια αύξουσα

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \xrightarrow{\downarrow} x_1 < x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \xrightarrow{\uparrow} x_1 > x_2$$



τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα $x'x$ στο $+\infty$

τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα $x'x$ στο $-\infty$

B

Λογαριθμική συνάρτηση

Λογαριθμικές ονομάζονται οι συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή βρίσκεται μέσα σε λογάριθμο.

Μορφή: $f(x) = \log_{\alpha} x$ με $0 < \alpha \neq 1$

Πεδίο ορισμού: $(0, +\infty)$

Σύνολο τιμών: $\mathbb{R}$

Η λογαριθμική είναι συνάρτηση "1-1", επομένως ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow{"1-1"} x_1 = x_2$$

Κοινό σημείο με άξονα x'x: A(0,1)

αν $0 < \alpha < 1$

αν $\alpha > 1$

Μονοτονία: γνήσια φθίνουσα

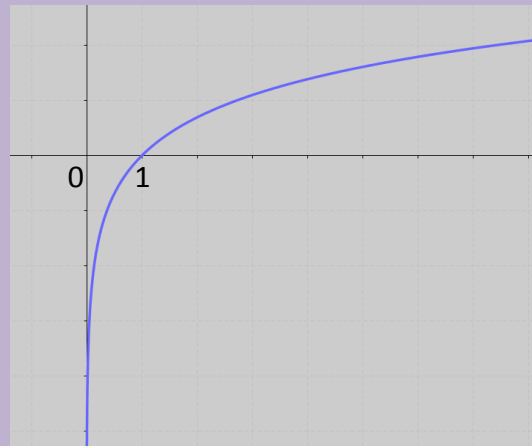
Μονοτονία: γνήσια αύξουσα

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow{\searrow} x_1 < x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2 \xrightarrow{\nearrow} x_1 > x_2$$



τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα γ'γ στο 0



τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα γ'γ στο 0

Η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, είναι η λογαριθμική συνάρτηση και η αντίστροφη της λογαριθμικής, είναι η εκθετική συνάρτηση. Αυτό σημαίνει:

- ➡ ότι οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, δηλαδή την ευθεία $y=x$.
- ➡ όταν το σημείο $A(x, y)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της εκθετικής, τότε το σημείο $A'(y, x)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της αντίστοιχης λογαριθμικής και το αντίστροφο.
- ➡ η εκθετική και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

$$\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta \text{ με } 0 < \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

$$\log_{10} \theta = \log \theta$$

$$\log_e \theta = \ln \theta$$

$$\log_{\alpha} x + \log_{\alpha} y = \log_{\alpha} (x \cdot y)$$

$$\log_{\alpha} x - \log_{\alpha} y = \log_{\alpha} \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\log_{\alpha} x^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} x$$

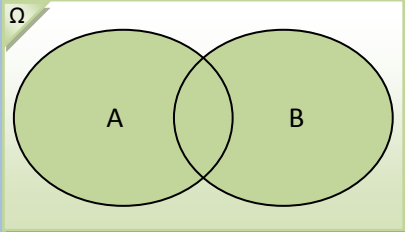
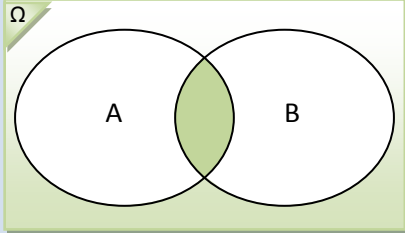
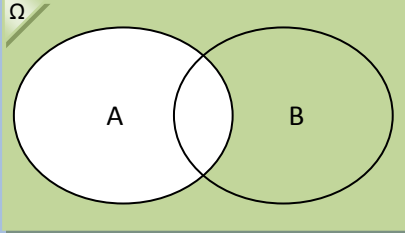
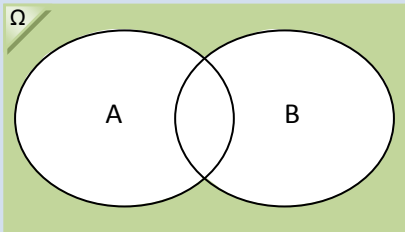
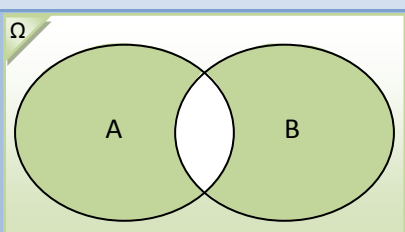
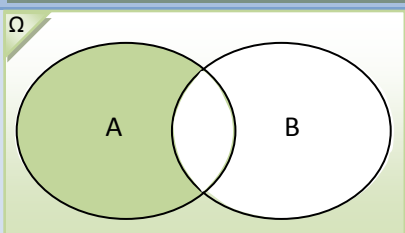
$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta} \text{ όπου } 1 \neq \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0$$

$$\log 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\log 1 = \ln 1 = 0$$

πράξεις με σύνολα

διάγραμμα Venn	συμβολισμός	ερμηνεία
	$A \cup B$	πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B (πραγματοποιείται το A ή το B)
	A ένωση B	
	τα στοιχεία των συνόλων A και B μαζί	
	$A \cap B$	πραγματοποιείται το A και το B ταυτόχρονα
	A τομή B	
	τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και B	
	A'	δεν πραγματοποιείται το A
	συμπληρωματικό του A	
	τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A	
	$(A \cup B)'$	δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B
	συμπληρωματικό της $A \cup B$	
	τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στην $A \cup B$	
	$(A \cup B) - (A \cap B)$	πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A και B (πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B)
	τα στοιχεία των A και B, χωρίς τα κοινά τους	
	$A - (A \cap B)$	πραγματοποιείται μόνο το A
	τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B	

ακολουθίες

αριθμητική πρόοδος

Καλούμε αριθμητική πρόοδο, την ακολουθία της οποίας κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση πάντα του ίδιου σταθερού αριθμού ω .

(Ο ω δεν αποκλείεται να είναι αρνητικός)

Για παράδειγμα οι αριθμοί -5, -3, -1, 1, 3, ... αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αφού αν προσθέσουμε σε οποιονδήποτε από αυτούς τον αριθμό $\omega=2$, προκύπτει ο επόμενος.

Στην αριθμητική πρόοδο χρήσιμες είναι οι παρακάτω σχέσεις:

νιοστός όρος αριθμητικής προόδου	ο νιοστός όρος αριθμητικής προόδου υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \omega$ όπου α_1 ο πρώτος όρος της ακολουθίας.
άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου	το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου, υπολογίζεται από τη σχέση: $S_n = \frac{n}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_n)$ ή την ισοδύναμη: $S_n = \frac{n}{2} \cdot [2\alpha_1 + (n - 1) \cdot \omega]$
αριθμητικός μέσος	αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε για αυτοί συνδέονται με τη σχέση: $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

B

γεωμετρική πρόοδος

Καλούμε γεωμετρική πρόοδο, την ακολουθία της οποίας κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο, πολλαπλασιάζοντας πάντα με τον ίδιο σταθερό αριθμό λ .

(Προφανώς ζητάμε $\lambda \neq 0$, για να ορίζεται η ακολουθία, ενώ αν $\lambda = 1$, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ίσοι μεταξύ τους, επομένως δε μιλάμε για γεωμετρική πρόοδο)

Για παράδειγμα οι αριθμοί 3, -6, 12, -24... αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου, αφού αν πολλαπλασιάσουμε οποιονδήποτε αριθμό με $\lambda = -2$ προκύπτει ο επόμενος.

Στη γεωμετρική πρόοδο χρήσιμες είναι οι παρακάτω σχέσεις:

νιοστός όρος γεωμετρικής προόδου	ο νιοστός όρος γεωμετρικής προόδου υπολογίζεται από τη σχέση: $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$ όπου α_1 ο πρώτος όρος της ακολουθίας και λ ο λόγος της.
άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου	το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, υπολογίζεται από τη σχέση: $S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$ όπου α_1 ο πρώτος όρος της ακολουθίας και λ ο λόγος της. (Η σχέση ισχύει με την προϋπόθεση $\lambda \neq 1$).
γεωμετρικός μέσος	αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε για αυτοί συνδέονται με τη σχέση: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

η ευθεία

γενική μορφή ευθείας

Η γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι:

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

Εντούτοις, συχνά εμφανίζεται και με κάποια από τις μορφές:

$$y = \lambda \cdot x + \beta$$
$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

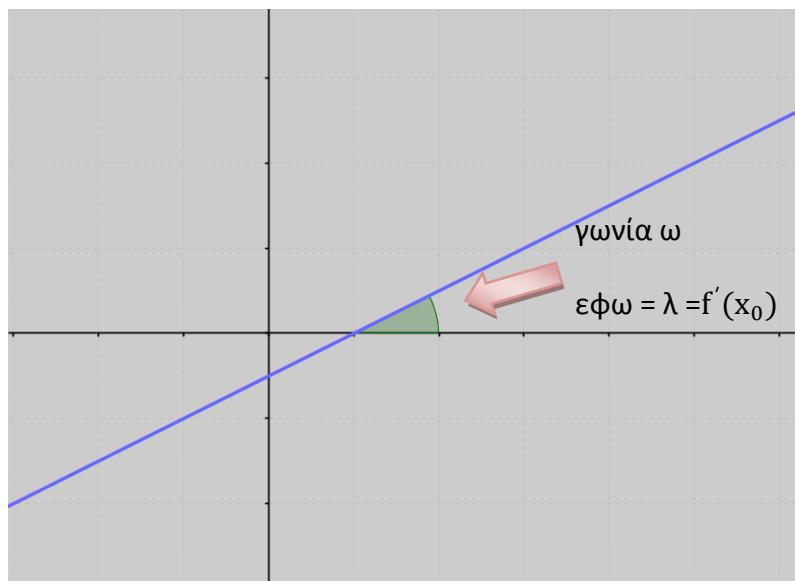
$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως εξίσωση εφαπτομένης συνάρτησης.

συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ο **συντελεστής διεύθυνσης** μιας ευθείας (ονομάζεται και κλίση της ευθείας), εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας ω , που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.



Σε κάθε περίπτωση, **για να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας κάνουμε κάτι από τα παρακάτω, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος:

- ➡ λύνουμε την εξίσωσή της (αν τη γνωρίζουμε) ως προς y . Τότε, ο συντελεστής του x (**μαζί με το πρόσημο και τυχόν παρονομαστή που μπορεί να έχει**), είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. *(Μοναδική εξαίρεση σε αυτό, είναι εξισώσεις της μορφής $x = \text{αριθμός}$, οι οποίες εκφράζουν ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$, και ο συντελεστής διεύθυνσής τους δεν ορίζεται).*
- ➡ Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο σημείων $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ της ευθείας, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το συντελεστή διεύθυνσης της από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$\text{με } x_A \neq x_B$$

Αν $x_A = x_B$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δεν ορίζεται και η εξίσωσή της είναι $x = x_A$.

- ➡ Αν γνωρίζουμε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$, τότε $\lambda = \tan \phi$.
- ➡ Αν γνωρίζουμε την εξίσωση μιας άλλης ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ_1 , ως προς την οποία η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη, τότε $\lambda = \lambda_1$
- ➡ Αν γνωρίζουμε την εξίσωση μιας άλλης ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ_1 , ως προς την οποία η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη, τότε $\lambda \cdot \lambda_1 = -1$

Β

κοινά σημεία της ευθείας με τους άξονες

- Για να προσδιορίσουμε το κοινό σημείο μιας ευθείας με τον άξονα x' (με την προϋπόθεση να υπάρχει κοινό σημείο), θέτουμε $y=0$ στην εξίσωσή της, και λύνουμε στη συνέχεια ως προς x . Η τιμή x_0 που προσδιορίζουμε, αποτελεί την τετμημένη του σημείου. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι: $A \ x_0, 0$.
- Για να προσδιορίσουμε το κοινό σημείο μιας ευθείας με τον άξονα y' (με την προϋπόθεση να υπάρχει κοινό σημείο), θέτουμε $x=0$ στην εξίσωσή της, και λύνουμε στη συνέχεια ως προς y . Η τιμή y_0 που προσδιορίζουμε, αποτελεί την τεταγμένη του σημείου. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι: $B \ 0, y_0$.

Γ

συνθήκη παραλληλίας ευθειών

Για να είναι δύο ευθείες παράλληλες, θα πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή θα πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$.

Δ

συνθήκη καθετότητας ευθειών

Για να είναι δύο ευθείες κάθετες, θα πρέπει το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους να ισούται με -1 , δηλαδή πρέπει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Ε

κοινά σημεία ευθειών

Για να προσδιορίσουμε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

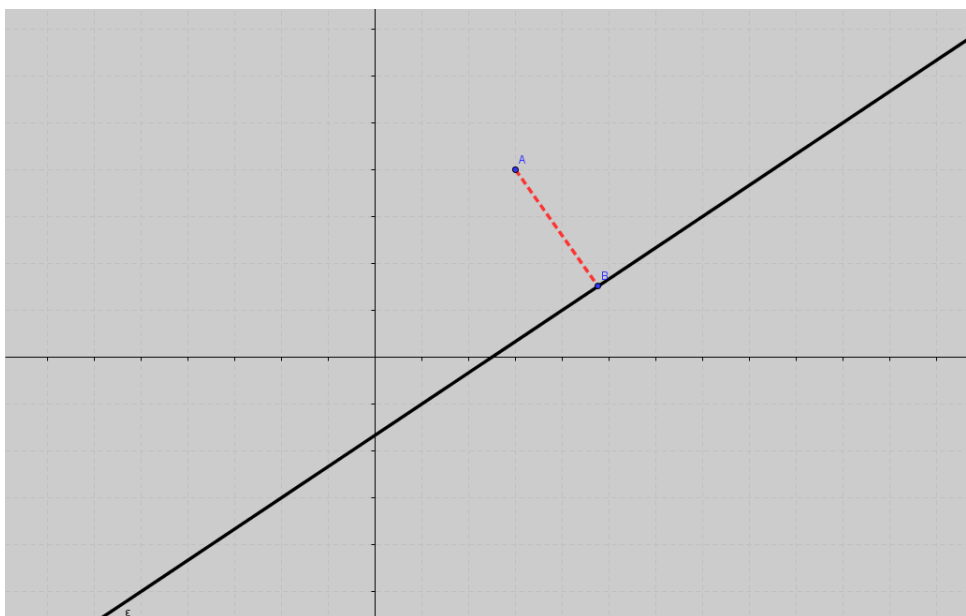
Αν προκύψει λύση, τότε αυτή εκφράζει τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των ευθειών.

Αν το σύστημα προκύψει αδύνατο, σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, οπότε δεν έχουν κοινό σημείο (δύο παράλληλες ευθείες δεν έχουν κοινό σημείο, επομένως το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αδύνατο).

Αν το σύστημα προκύψει να έχει άπειρες λύσεις, σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται (δύο ευθείες που ταυτίζονται έχουν άπειρα κοινά σημεία).

Όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την απόσταση ενός σημείου $A(x_A, y_A)$ από μια ευθεία $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$d(A, \epsilon) = \frac{|A \cdot x_A + B \cdot y_A + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



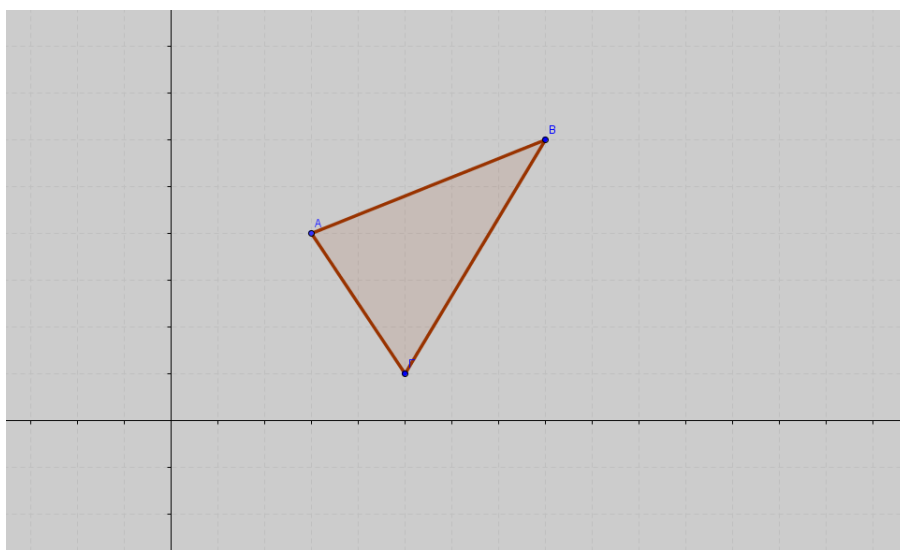
Αν η απόσταση έχει τιμή μηδέν, το σημείο A ανήκει στην ευθεία ϵ .

Ζ

εμβαδόν τριγώνου που ορίζεται από τρία σημεία

Όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τριών σημείων $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ και ζητάμε να προσδιορίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ που αυτά ορίζουν, χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_\Gamma & y_A - y_\Gamma \end{vmatrix} \right|$$



Αν το εμβαδόν προσδιοριστεί ίσο με το μηδέν, τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

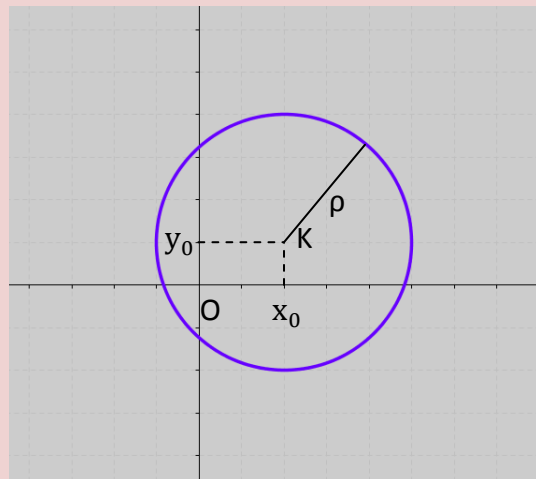
κύκλος

Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που η απόσταση τους από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου, το οποίο καλούμε κέντρο, είναι σταθερή. Την απόσταση αυτή ονομάζουμε ακτίνα του κύκλου.

εξίσωση του κύκλου

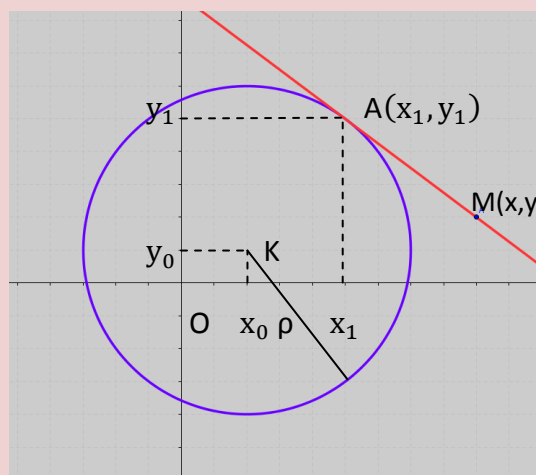
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

όπου $K(x_0, y_0)$ οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και ρ η ακτίνα του



εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x) + (y_1 - y_0) \cdot (y_1 - y) = 0$$



γενική μορφή εξίσωσης κύκλου: η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$$

όταν ισχύει

$$A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma > 0$$

εκφράζει κύκλο με κέντρο

$$\kappa \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$$

και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma}}{2}$$

B

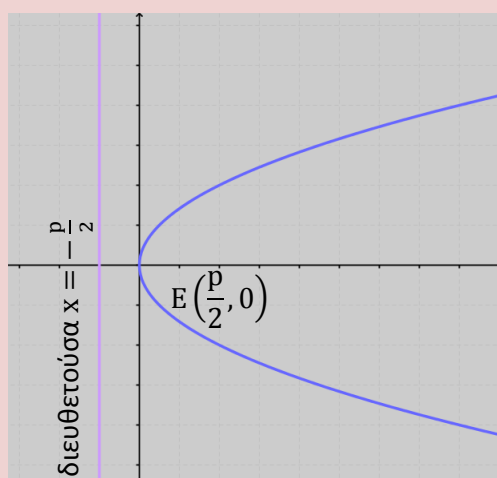
παραβολή

Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ , ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ .

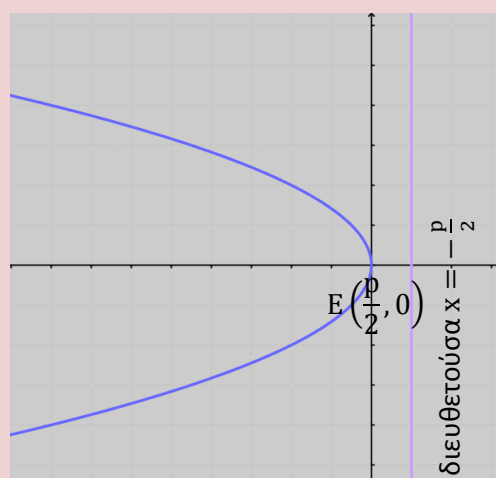
εξίσωση της παραβολής

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

αν $p > 0$



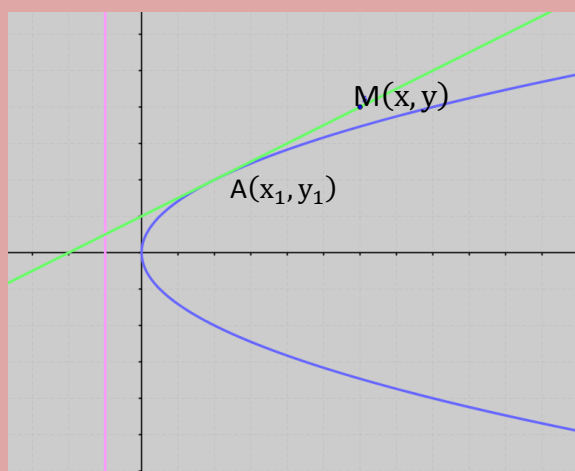
αν $p < 0$



εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής

$$y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)$$

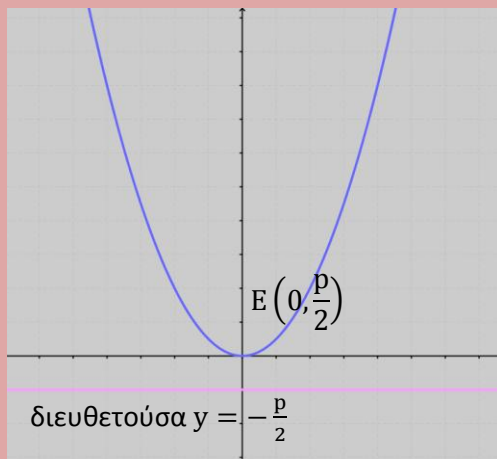
σε κάποιο σημείο $A(x_1, y_1)$ της παραβολής $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$



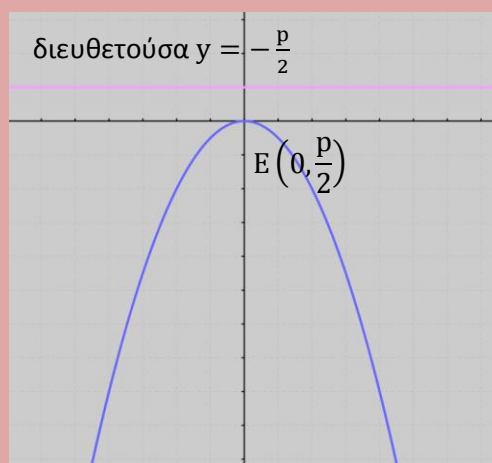
εξίσωση της
παραβολής

$$x^2 = 2 \cdot p \cdot y$$

αν $p > 0$



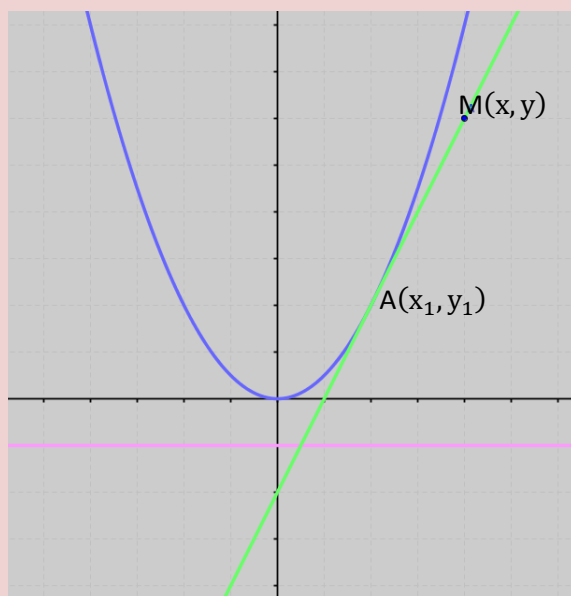
αν $p < 0$



εξίσωση
εφαπτομένης
της παραβολής

$$x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)$$

σε κάποιο σημείο $A(x_1, y_1)$ της παραβολής $x^2 = 2 \cdot p \cdot y$



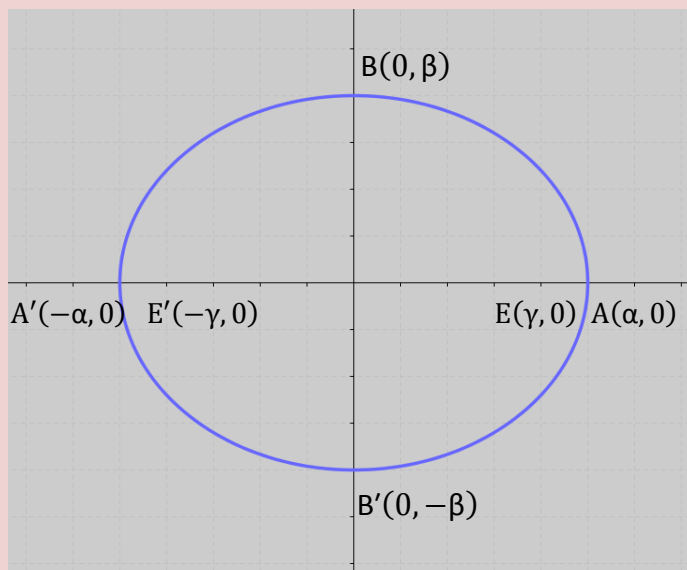
Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με $2a$ και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ . Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται εστιακή απόσταση της έλλειψης.

εξίσωση της έλλειψης

η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$



εκκεντρότητα της έλλειψης

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$$

$$\frac{\beta}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

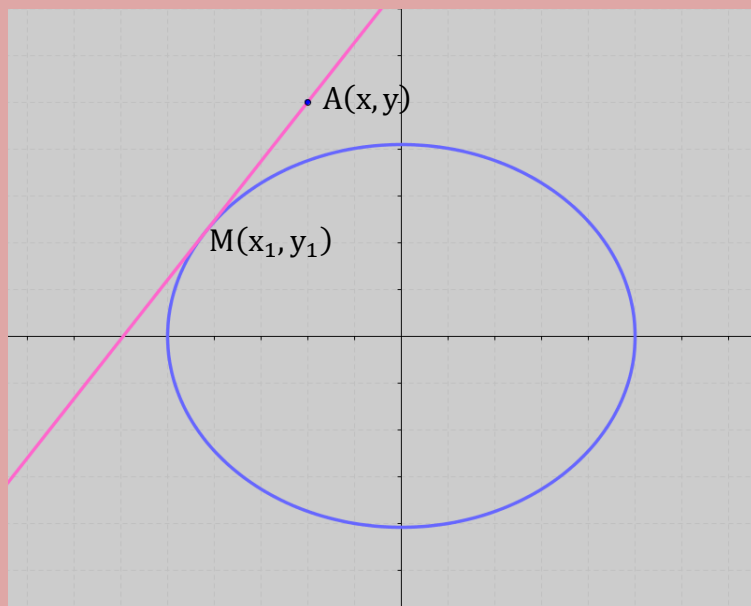
όσο $\varepsilon \rightarrow 0$ η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος

όσο $\varepsilon \rightarrow 1$ η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα

εξίσωση
εφαπτομένης
της έλλειψης

η εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$, σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

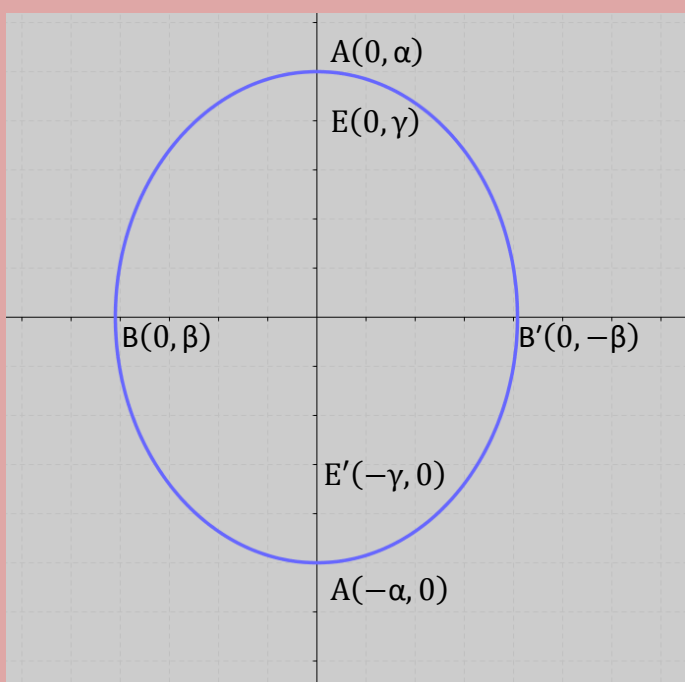


εξίσωση της
έλλειψης

η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

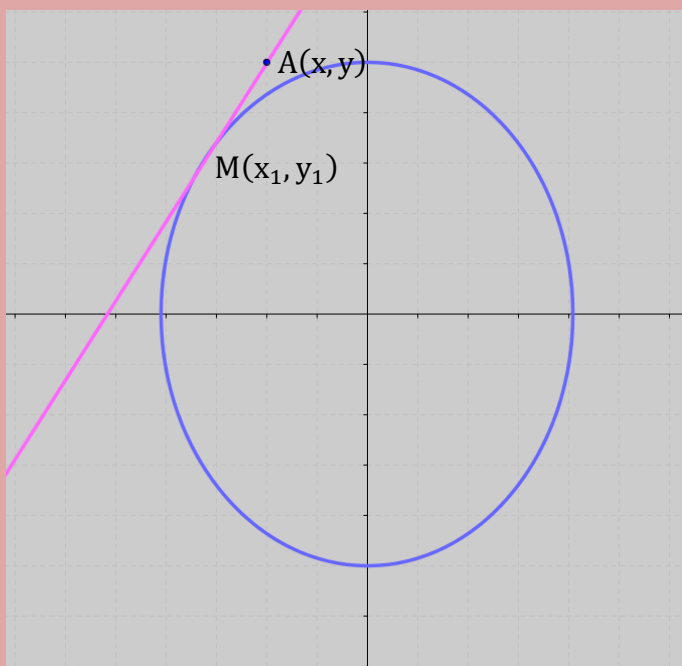
όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$



εξίσωση
εφαπτομένης
της έλλειψης

η εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$, σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{y \cdot y_1}{\alpha^2} + \frac{x \cdot x_1}{\beta^2} = 1$$



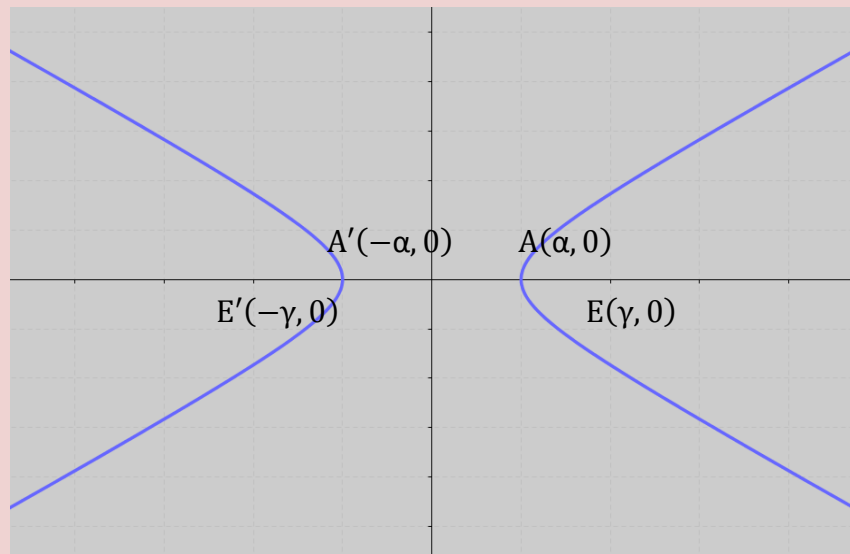
Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε συνήθως με $2a$, ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ . Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται εστιακή απόσταση της υπερβολής.

εξίσωση της υπερβολής

η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερή διαφορά $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$

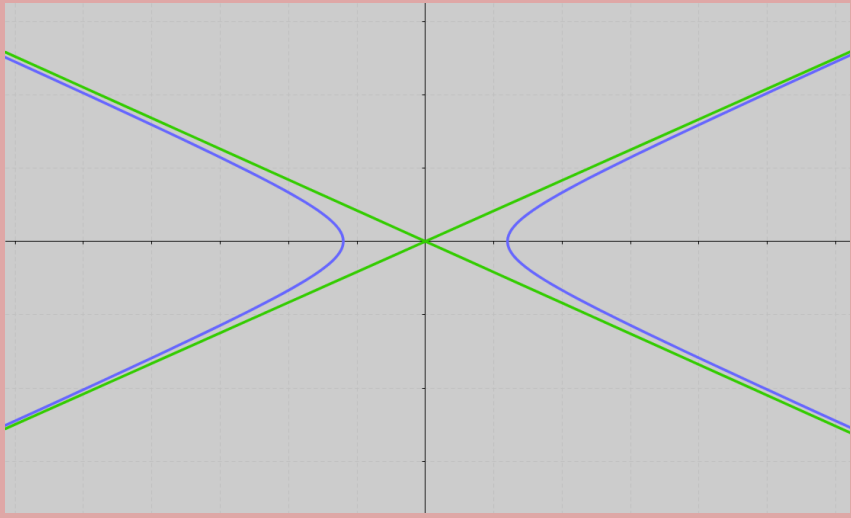
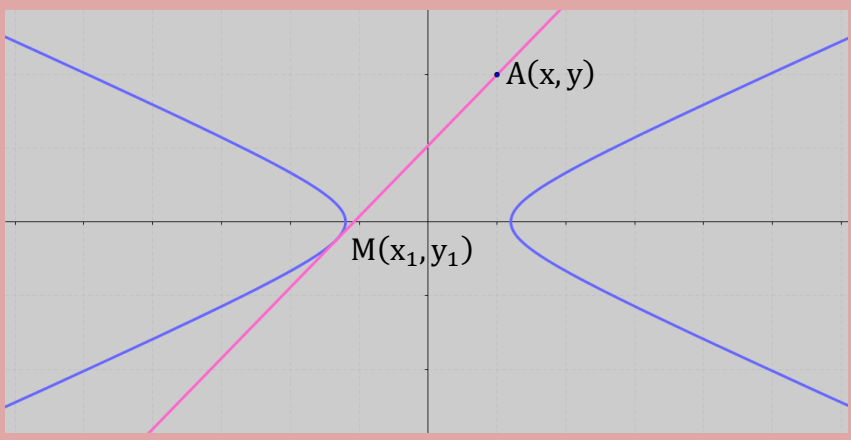


εκκεντρότητα της υπερβολής

$$\epsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$$

$$\frac{\beta}{a} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

η εκκεντρότητα ϵ προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της κάθε ασύμπτωτης της υπερβολής

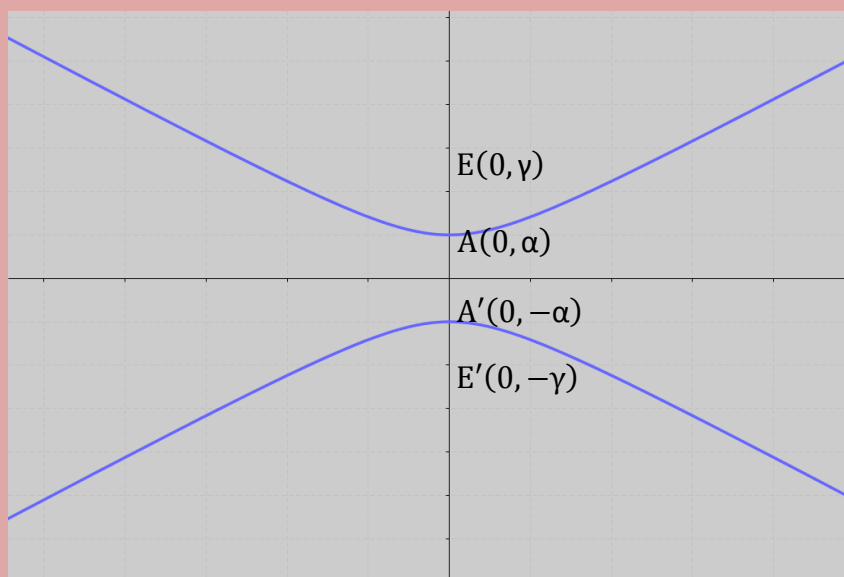
ασύμπτωτες της υπερβολής	οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι $y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot x \text{ και } y = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot x$
	
εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής	η εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$, σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από τη σχέση $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$
	

εξίσωση της
υπερβολής

η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

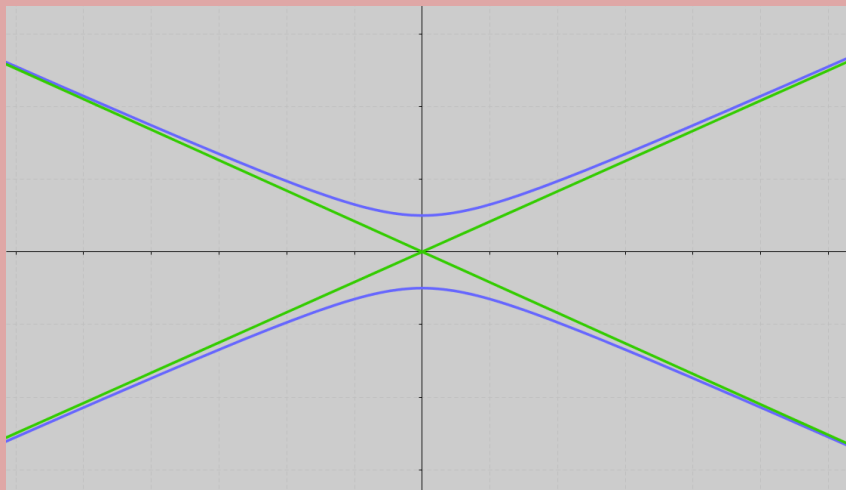
όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$



ασύμπτωτες
της υπερβολής

οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερή διαφορά $2a$ είναι

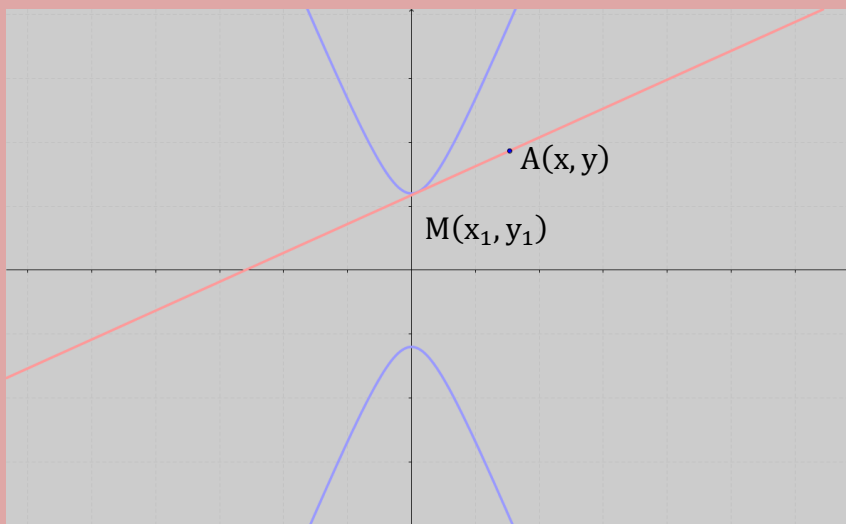
$$y = \frac{a}{b} \cdot x \text{ και } y = -\frac{a}{b} \cdot x$$



εξίσωση
εφαπτομένης
της υπερβολής

η εξίσωση εφαπτομένης της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$, σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{y \cdot y_1}{a^2} - \frac{x \cdot x_1}{b^2} = 1$$



μαθηματικές συνθήκες

Παρακάτω αναφέρονται οι σημαντικότερες μαθηματικές συνθήκες και οι ερμηνείες τους.

σχέση	ερμηνεία
$A \cdot B = 0$	$A = 0$ ή $B = 0$
$A \cdot B \neq 0$	$A \neq 0$ και $B \neq 0$
$ A + B = 0$	$A = 0$ και $B = 0$
$ A + B \neq 0$	$A \neq 0$ ή $B \neq 0$
$A^2 + B^2 = 0$	$A = 0$ και $B = 0$
$A^2 + B^2 \neq 0$	$A \neq 0$ ή $B \neq 0$

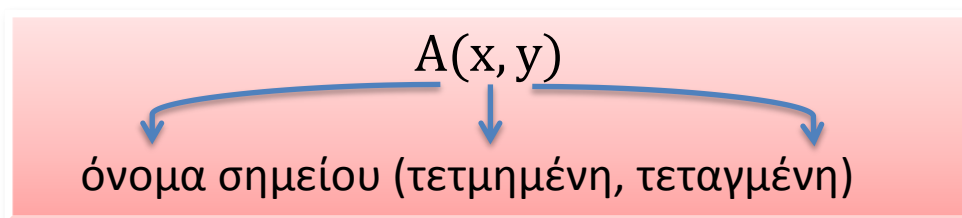
σημεία στο επίπεδο

σύστημα συντεταγμένων

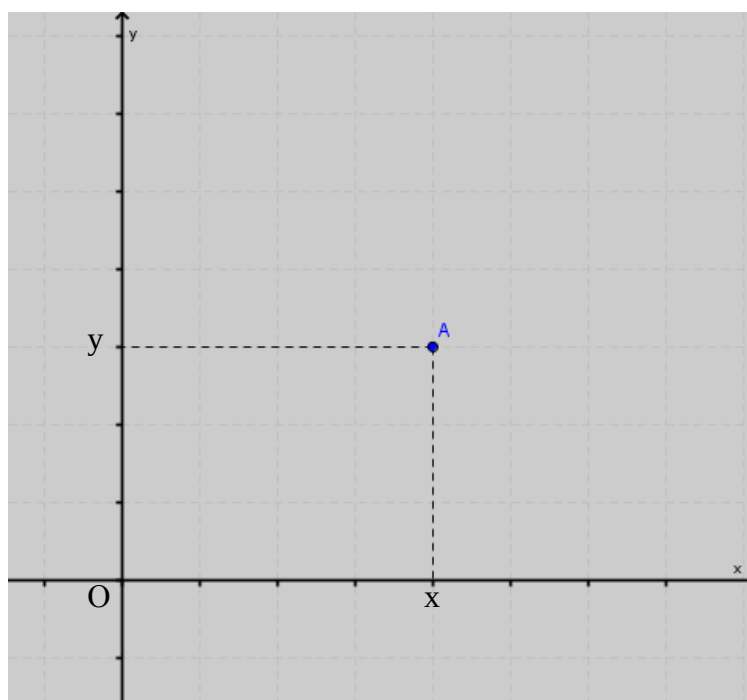
Δύο κάθετοι μεταξύ τους άξονες δημιουργούν ένα επίπεδο. Συνηθέστερα, ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται άξονας x' , ενώ ο κατακόρυφος ονομάζεται άξονας y' . Οι άξονες αυτοί είναι βαθμονομημένοι και τέμνονται στο σημείο $O(0,0)$.

Κάθε σημείο του επιπέδου ορίζεται από τις συντεταγμένες του, μια τετμημένη που αφορά τον άξονα x' και μια τεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα y' .

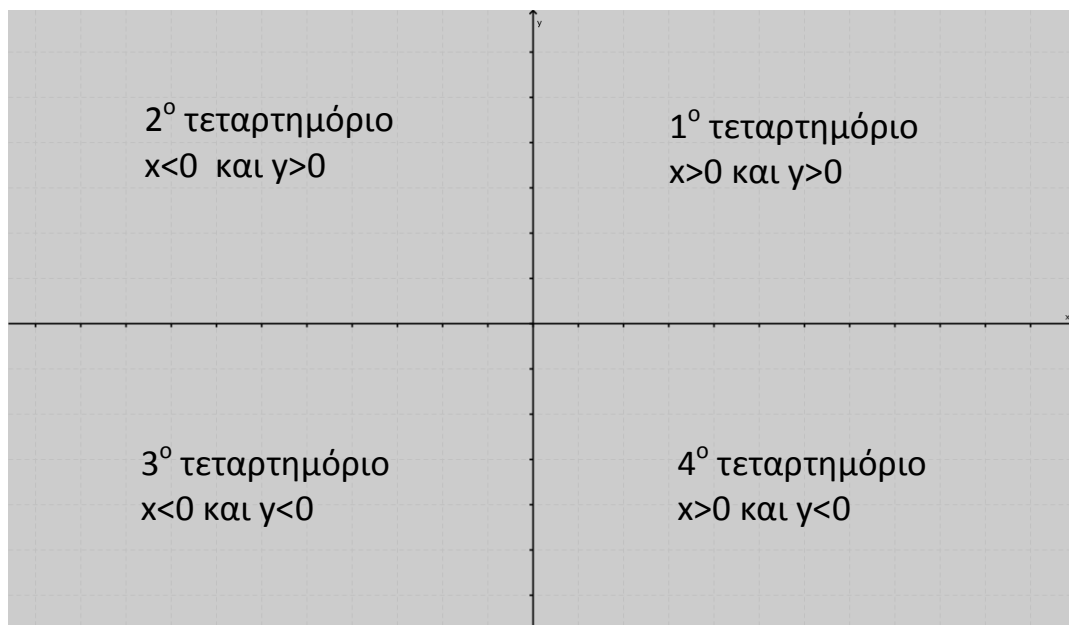
Με βάση λοιπόν τα παραπάνω η μορφή έκφρασης ενός σημείου είναι:



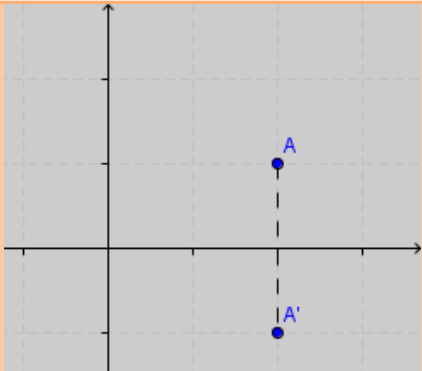
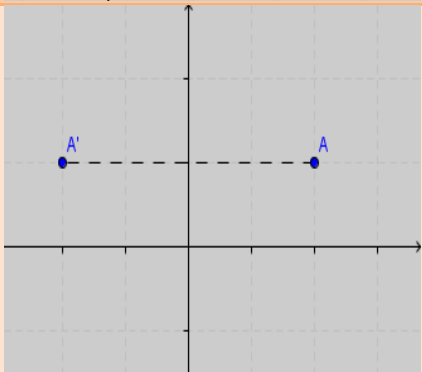
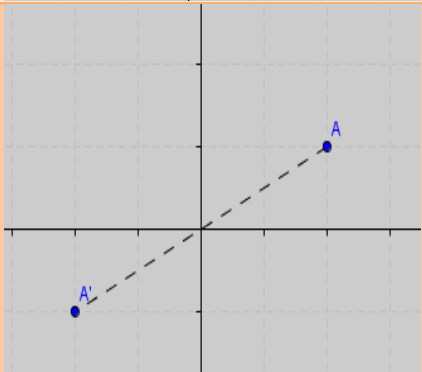
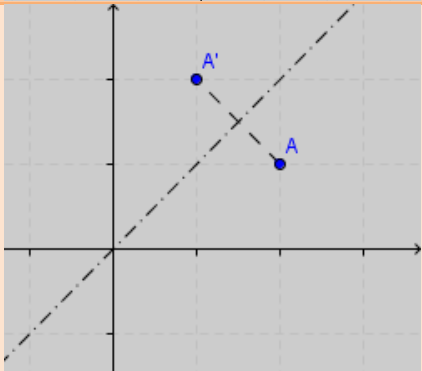
Η γραφική απεικόνιση ενός σημείου $A(x, y)$ στο επίπεδο συντεταγμένων φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Το επίπεδο χωρίζεται από τους άξονες σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Έστω σημείο $A(x, y)$. Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι συντεταγμένες και παριστάνονται γραφικά, τα συμμετρικά σημεία του $A(x, y)$:

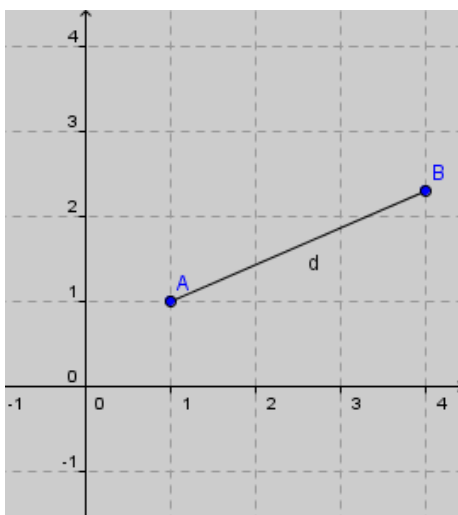
Περιγραφή συμμετρίας	Συντεταγμένες σημείου	Γραφική απεικόνιση
ως προς τον άξονα $x'x$	$A'(x, -y)$	
ως προς τον άξονα $y'y$	$A'(-x, y)$	
ως προς την αρχή των αξόνων (σημείο $O(0,0)$)	$A'(-x, -y)$	
ως προς τη διχοτόμο 1 ^{ου} και 3 ^{ου} τεταρτημορίου, δηλαδή την ευθεία $y=x$	$A'(y, x)$	

Γ

απόσταση δύο σημείων του επιπέδου

Αν έχουμε δύο σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB , θα έχει μήκος που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



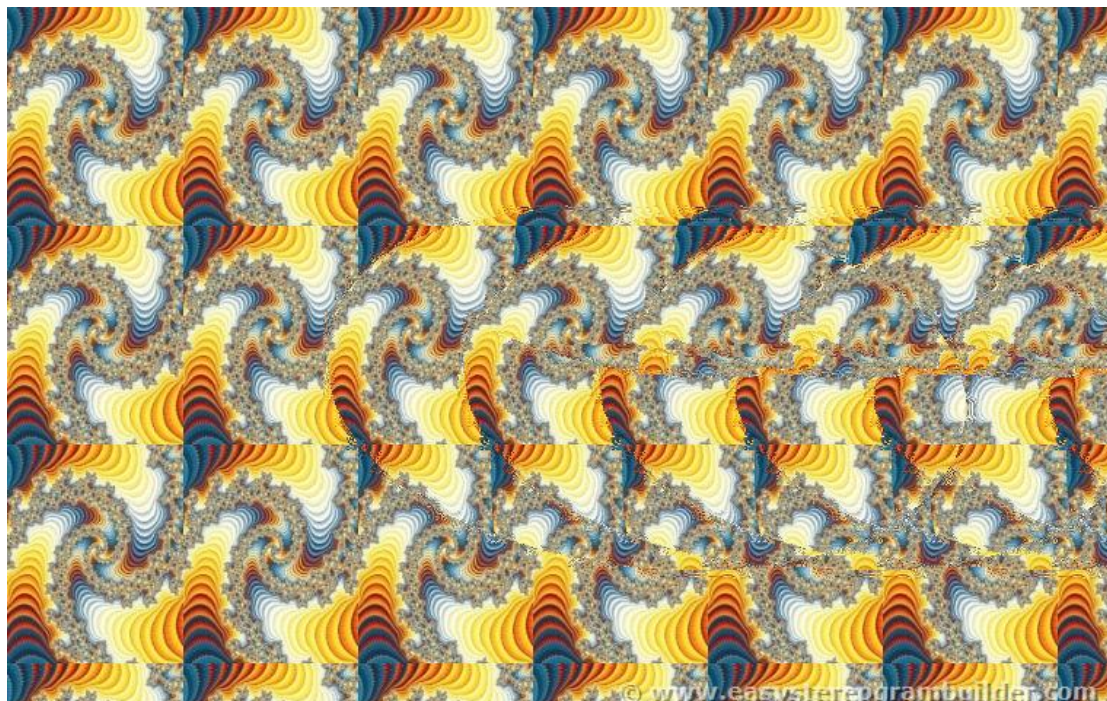
Δ

συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Έστω δύο σημεία με συντεταγμένες $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$. Οι συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ του ευθύγραμμου τμήματος AB , θα είναι:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Παράρτημα



Λίγα λόγια για το εξώφυλλο

Στο εξώφυλλο απεικονίζεται ένα fractal. Τα fractal είναι μία τάξη πολύπλοκων γεωμετρικών μορφών που έχουν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας. Τα fractal διαφέρουν από τα απλά σχήματα της κλασικής ή ευκλείδειας γεωμετρίας - το τετράγωνο, τον κύκλο, την σφαίρα κ.λπ.

Μπορεί να περιγράψουν πολλά αντικείμενα με ακανόνιστη μορφή ή χωρικά ανομοιόμοια φαινόμενα στην φύση, τα οποία δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με την ευκλείδεια γεωμετρία.

Ο όρος fractal πλάσθηκε από τον πολωνικής καταγωγής μαθηματικό Benoit B. Mandelbrot από την λατινική λέξη fractus (θρυμματισμένος ή σπασμένος), για να εκφράσει την ιδέα ενός σχήματος τού οποίου οι διαστάσεις δεν περιγράφονται με ακέραιο αριθμό. Στα Ελληνικά αποδόθηκε με τον όρο Μορφοκλασματική Καμπύλη.

Επιπλέον όμως, το εξώφυλλο αποτελεί και ένα στερεόγραμμα.

Η τεχνική για να δει κάποιος ένα στερεόγραμμα είναι απλή αλλά απαιτεί στην αρχή, σχετική υπομονή και συγκέντρωση!

Αρχικά πλησιάζουμε το πρόσωπό μας στην εικόνα και το απομακρύνουμε σταδιακά, κοιτώντας την εικόνα περιφερειακά και όχι εστιασμένα (όπως όταν κοιτάμε

αφηρημένοι πχ ένα μολύβι πάνω στο γραφείο αλλά στην πραγματικότητα βλέπουμε θολά και το τετράδιο παραδίπλα και το γραφείο και ότι υπάρχει τριγύρω στο οπτικό μας πεδίο). Σε λίγα δευτερόλεπτα θα εμφανιστεί μπροστά στα έκπληκτα μάτια μας μια άλλη κρυφή τρισδιάστατη εικόνα που απεικονίζει κάτι διαφορετικό από αυτό που βλέπουμε κοιτώντας την απλά.

Στο συγκεκριμένο στερεόγραμμα απεικονίζεται ένα μεγάλο 0, εκφράζοντας την αρχή και το τέλος, τον κύκλο της γνώσης. Την αιωνιότητα της μαθηματικής σκέψης. Το ατέρμονο της αναζήτησης της αλήθειας.

Η τεχνική ανάπτυξης των στερεογραμμάτων, βασίζεται στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στους μετασχηματισμούς Laplace. Έτσι στο εξώφυλλο τελικά συνδέεται άρρηκτα η ιστορία των μαθηματικών: από το τίποτα, στις σύγχρονες θεωρίες.

Η εικόνα κατασκευάστηκε μέσω του δικτυακού τόπου

www.easystereogrambuilder.com .

Σ. Ασημέλλης

