κεφάλαιο 8

τριγωνομετρία

A

βασικές έννοιες

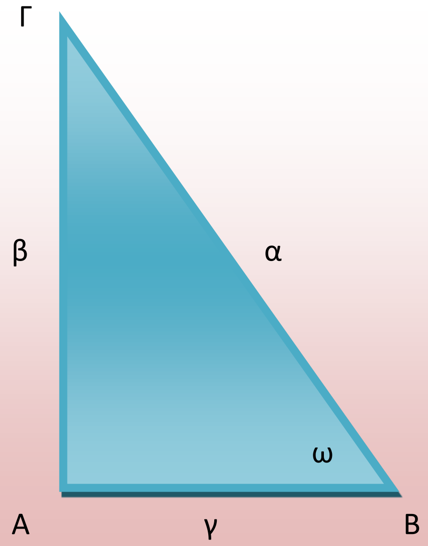
Στην τριγωνομετρία χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\text{σφω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$



π.χ. για το τρίγωνο του σχήματος έχουμε:

$\text{ημω} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\text{συνω} = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\text{εφω} = \frac{\beta}{\gamma}$ και $\text{σφω} = \frac{\gamma}{\beta}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

$$-1 \leq \text{ημx} \leq 1$$

$$-1 \leq \text{συνx} \leq 1$$

Β τριγωνομετρικοί αριθμοί χρήσιμων γωνιών

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων χρήσιμων γωνιών.

Γωνιά σε μοίρες	Γωνία σε ακτίνια (rad)	ημω	συνω	εφω	σφω
0^0	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	δεν ορίζεται	0

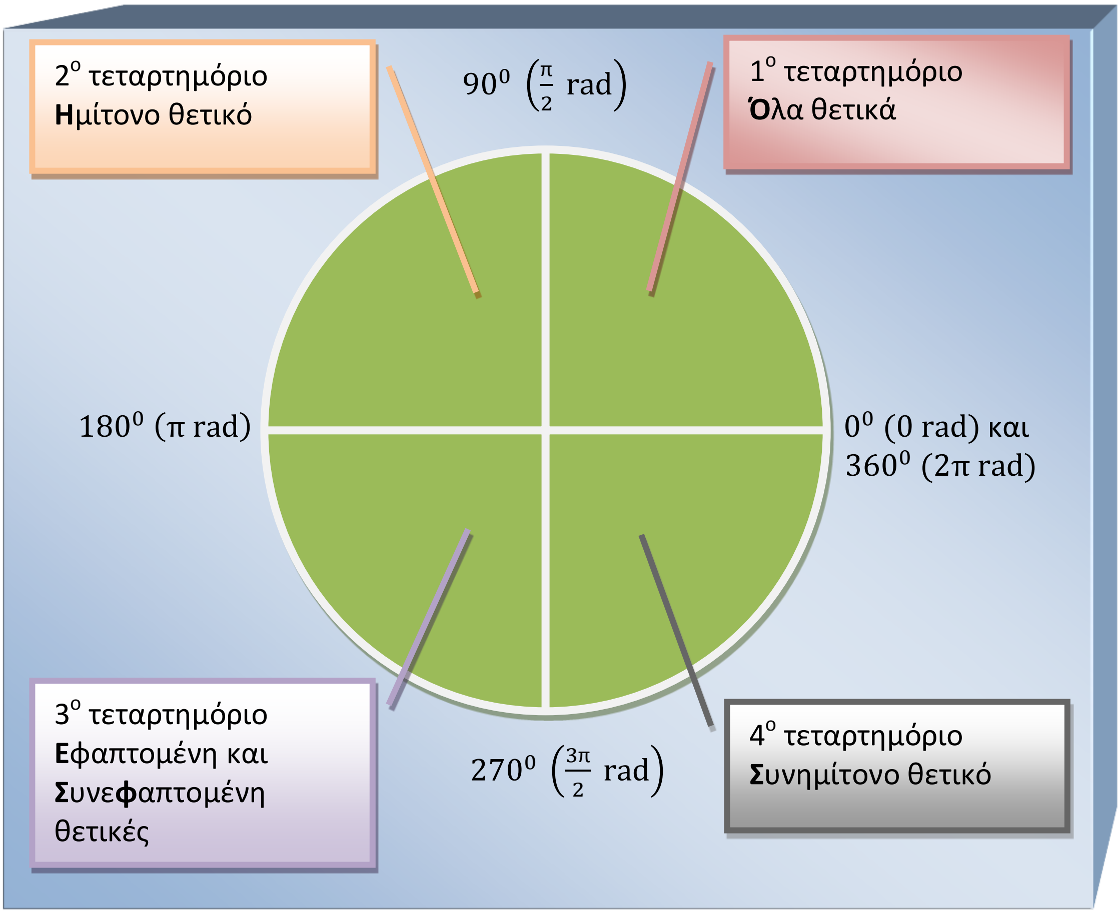
Για να μετατρέψουμε μια γωνία από μοίρες σε ακτίνια ή το αντίστροφο χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\frac{2\pi}{\text{ακτίνια}} = \frac{360^0}{\text{μοίρες}}$$

Γ αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Τα βήματα για να προσδιορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που υπερβαίνουν τις $90^0\left(\frac{\pi}{2}\ \text{rad}\right)$, είναι τα παρακάτω:

- (*) Αφαιρούμε τους κύκλους που μπορεί να περιέχονται στη δοσμένη γωνία. Αυτονόητο είναι πως αν η γωνία δεν υπερβαίνει τον ένα κύκλο, το στάδιο αυτό παρακάμπτεται.
- Προσδιορίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο τερματίζει η δοσμένη γωνία. Αυτό το τεταρτημόριο, καθορίζει τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας μας, σύμφωνα με το παρακάτω σχεδιάγραμμα:



- Ανάλογα με το τεταρτημόριο τερματισμού, η αρχική (παλαιά) γωνία τροποποιείται σε μια νέα γωνία, με βάση τον πίνακα:

Γωνίες στο 1^o τεταρτημόριο	**<u>Ειδικά</u> για τις γωνίες αυτές:** νέα γωνία = $\frac{\pi}{2}$ - παλιά γωνία (νέα γωνία = 90^0 - παλιά γωνία) **ΑΛΛΑ ΚΑΙ:** ημ$\longleftrightarrow$συν εφ$\longleftrightarrow$σφ
Γωνίες στο 2^o τεταρτημόριο	νέα γωνία = π - παλιά γωνία (νέα γωνία = 180^0 - παλιά γωνία)
Γωνίες στο 3^o τεταρτημόριο	νέα γωνία = παλιά γωνία – π (νέα γωνία = παλιά γωνία - 180^0)
Γωνίες στο 4^o τεταρτημόριο	νέα γωνία = 2π – παλιά γωνία (νέα γωνία = 360^0 - παλιά γωνία)

Δ τριγωνομετρικές ταυτότητες

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες δεν διαφέρουν από τις γνωστές ταυτότητες της Άλγεβρας, μόνο που περιλαμβάνουν και τριγωνομετρικούς αριθμούς. Στη θέση του γράμματος (γωνίας) που περιέχουν (μπορεί να είναι και περισσότερα του ενός γράμματος), μπορούμε να αντικαθιστούμε μια τιμή. Στο ίδιο γράμμα μέσα στην ισότητα, αντικαθιστούμε πάντα την ίδια τιμή, πχ. όπου βλέπουμε α στην ταυτότητα μπορούμε να αντικαθιστούμε τις 30^0, ενώ όπου βλέπουμε β τις 42^0.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες χρησιμοποιούνται και για γωνίες εκφρασμένες σε μοίρες, και για γωνίες εκφρασμένες σε rad (ακτίνια).

Χρειάζεται επίσης να αναφερθεί ότι στη θέση του γράμματος (ή των γραμμάτων) που περιέχει μια τριγωνομετρική ταυτότητα, μπορούμε να αντικαθιστούμε και εγγράμματες ποσότητες. Για παράδειγμα στη θέση του ω μπορούμε να αντικαταστήσουμε το 2x.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Κάποιες ταυτότητες δεν έχουν νόημα για ορισμένες τιμές των γωνιών που περιέχουν. Για παράδειγμα στην εφαπτομένη, δεν μπορεί η γωνία να είναι 90^0.

βασικές

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$$

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}\ \mu\varepsilon\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}\ \mu\varepsilon\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}\ \mu\varepsilon\ \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\kappa\pi,\kappa\in Z$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}\ \mu\varepsilon\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\kappa\pi,\kappa\in Z$$

τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$$

$$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$$

$$\sigma\varphi2\alpha=\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq\kappa\pi,\kappa\in Z$$

E

πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία	ημω	συνω	εφω	σφω	γωνία	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0,0000	1,0000	0,0000		**46°**	0,7193	0,6947	1,0355	0,9657
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	**47°**	0,7314	0,6820	1,0724	0,9325
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	**48°**	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,0812	**49°**	0,7547	0,6561	1,1504	0,8693
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	**50°**	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	**51°**	0,7771	0,6293	1,2349	0,8098
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	**52°**	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1444	**53°**	0,7986	0,6018	1,3270	0,7536
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	**54°**	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	**55°**	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	**56°**	0,8290	0,5592	1,4826	0,6745
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	**57°**	0,8387	0,5446	1,5399	0,6494
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	**58°**	0,8480	0,5299	1,6003	0,6249
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	**59°**	0,8572	0,5150	1,6643	0,6009
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	**60°**	0,8660	0,5000	1,7320	0,5774
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	**61°**	0,8746	0,4848	1,8040	0,5543
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	**62°**	0,8829	0,4695	1,8807	0,5317
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	**63°**	0,8910	0,4540	1,9626	0,5095
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	**64°**	0,8988	0,4384	2,0503	0,4877
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	**65°**	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	**66°**	0,9135	0,4067	2,2460	0,4452
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	**67°**	0,9205	0,3907	2,3558	0,4245
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	**68°**	0,9272	0,3746	2,4751	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	**69°**	0,9336	0,3584	2,6051	0,3839
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	**70°**	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	**71°**	0,9455	0,3256	2,9042	0,3443
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	**72°**	0,9511	0,3090	3,0777	0,3249
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	**73°**	0,9563	0,2924	3,2708	0,3057
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	**74°**	0,9613	0,2756	3,4874	0,2867
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	**75°**	0,9659	0,2588	3,7320	0,2680
30°	0,5000	0,8660	0,5773	1,7321	**76°**	0,9703	0,2419	4,0108	0,2493
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	**77°**	0,9744	0,2250	4,3315	0,2309
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	**78°**	0,9781	0,2079	4,7046	0,2126
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	**79°**	0,9816	0,1908	5,1445	0,1944
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	**80°**	0,9848	0,1736	5,6712	0,1763
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	**81°**	0,9877	0,1564	6,3137	0,1584
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	**82°**	0,9903	0,1392	7,1153	0,1405
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	**83°**	0,9925	0,1219	8,1443	0,1228
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	**84°**	0,9945	0,1045	9,5143	0,1051
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	**85°**	0,9962	0,0872	11,4299	0,0875
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	**86°**	0,9976	0,0698	14,3004	0,0699
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	**87°**	0,9986	0,0523	19,0807	0,0524
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	**88°**	0,9994	0,0349	28,6352	0,0349
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	**89°**	0,9998	0,0175	57,2857	0,0175
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	**90°**	1,0000	0,0000		0,0000
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000					

ΣΤ τριγωνομετρικές εξισώσεις

Τριγωνομετρικές καλούνται οι εξισώσεις που έχουν άγνωστο (x), μέσα σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό. Αυτό που πρέπει να κάνουμε εμείς, είναι να προσδιορίσουμε την τιμή (ή συνηθέστερα τη *μορφή των τιμών*[1]) του αγνώστου, δηλαδή τη γωνία που επαληθεύει την εξίσωση.

ΣΤ 1 βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Παρακάτω δίνονται οι βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις, με τις αντίστοιχες λύσεις τους:

$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow x = \kappa\pi + \theta$

$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Rightarrow x = \kappa\pi + \theta$

με $\kappa \in \mathbb{Z}$

[1] Συνήθως οι λύσεις μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι άπειρες, γιατί άπειρες είναι οι γωνίες που έχουν ίδιες τιμές τριγωνομετρικών αριθμών. Αφού λοιπόν δεν μπορούμε να γράψουμε μία-μία όλες τις λύσεις τους (δεν θα τελειώναμε ποτέ!), δίνουμε μια σχέση που «περιγράφει» τις λύσεις.

ΣΤ 2 τριγωνομετρικές εξισώσεις με μείον

Όταν μπροστά από κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό σε μια τριγωνομετρική εξίσωση, υπάρχει αρνητικό πρόσημο και θέλουμε να το εξαφανίσουμε (για να έρθει η εξίσωση στη μορφή των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων), ακολουθούμε τους κανόνες του παρακάτω διαγράμματος:

$\etaμx = -\etaμθ \;\Rightarrow\; \etaμx = \etaμ(-θ)$

$συνx = -συνθ \;\Rightarrow\; συνx = συν(π - θ)$

$εφx = -εφθ \;\Rightarrow\; εφx = εφ(-θ)$

$σφx = -σφθ \;\Rightarrow\; σφx = σφ(-θ)$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

$συν(-θ) = συνθ$

Τα παραπάνω βασίζονται στις ακόλουθες ιδιότητες:

$\etaμ(-x) = -\etaμx$

$εφ(-x) = -εφx$

$σφ(-x) = -σφx$

$συν(-x) = συνx$

$-συνx = συν(π - x)$

ΣΤ 3 τριγωνομετρικές εξισώσεις με σύνθετες εκφράσεις του x

Πρόκειται για τριγωνομετρικές εξισώσεις, στις οποίες αντί για x, στον έναν ή και στους δύο εμφανιζόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς, περιέχονται πιο σύνθετες εκφράσεις. Δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις, εντούτοις βοηθητικό για την επίλυσή τους είναι το επόμενο διάγραμμα:

$\eta\mu f(x) = \eta\mu\theta$ →	$f(x) = 2\kappa\pi + \theta$ ή $f(x) = 2\kappa\pi + \pi - \theta$
$\sigma\upsilon\nu f(x) = \sigma\upsilon\nu\theta$ →	$f(x) = 2\kappa\pi + \theta$ ή $f(x) = 2\kappa\pi - \theta$
$\varepsilon\varphi f(x) = \varepsilon\varphi\theta$ →	$f(x) = \kappa\pi + \theta$
$\sigma\varphi f(x) = \sigma\varphi\theta$ →	$f(x) = \kappa\pi + \theta$

με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Ενδεχομένως και το θ να είναι έκφραση του x. Σε αυτή την περίπτωση, αφού εφαρμόσουμε όσα αναφέρει ο παραπάνω πίνακας, λύνουμε την εξίσωση που έχει προκύψει ως προς x.

ΣΤ 4 τριγωνομετρικές εξισώσεις αλγεβρικής μορφής

Υπάρχουν τριγωνομετρικές εξισώσεις, που η λύση τους βασίζεται σε πρώτη φάση σε επίλυση κλασικής πολυωνυμικής εξίσωσης της άλγεβρας. Συνηθισμένες τακτικές αντιμετώπισης τέτοιων εξισώσεων, είναι αυτές που προτείνονται παρακάτω:

Αντικαθιστούμε τον πολλαπλά εμφανιζόμενο τριγωνομετρικό αριθμό με y.	π.χ. η εξίσωση $ημ^2x - 2ημx + 1 = 0$ με αντικατάσταση του ημx με y, δίνει $y^2 - 2y + 1 = 0$.
Εφαρμόζουμε κάποια από τις συνηθισμένες μαθηματικές συνθήκες.	π.χ. η εξίσωση $(2ημx + 1) \cdot (\sqrt{3}εφx - 1) = 0$ δίνει $2ημx + 1 = 0$ ή $\sqrt{3}εφx - 1 = 0$.
Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $x^ν = α$.	π.χ. η εξίσωση $εφ^2x = 3$ δίνει $εφx = \sqrt{3}$ ή $εφx = -\sqrt{3}$

Επίσης χρήσιμες είναι οι μετατροπές:

$ημx = συν\left(\frac{π}{2} - x\right)$	$συνx = ημ\left(\frac{π}{2} - x\right)$
$εφx = σφ\left(\frac{π}{2} - x\right)$	$σφx = εφ\left(\frac{π}{2} - x\right)$
$εφx = \frac{1}{σφx}$	$σφx = \frac{1}{εφx}$

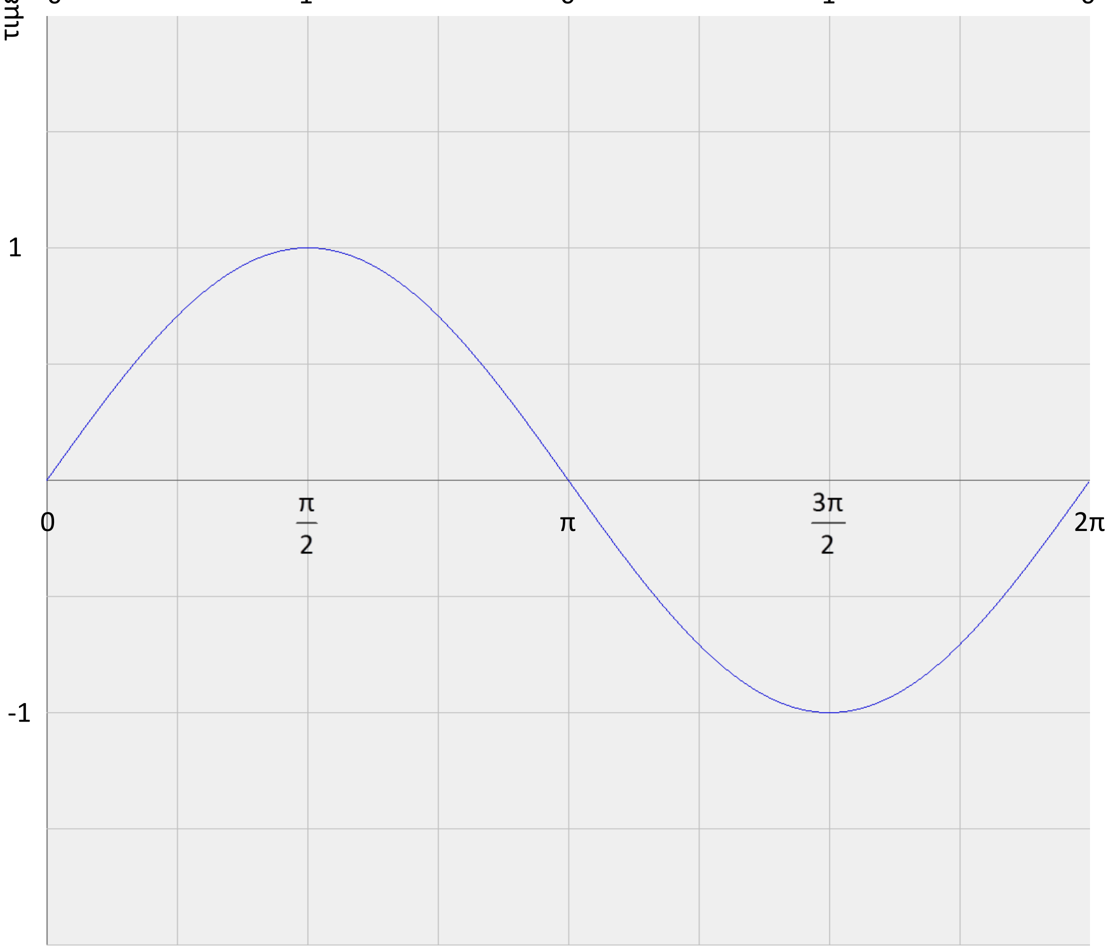
Ζ — τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ζ 1 — η συνάρτηση f(x)=ημx

Η συνάρτηση $f(x) = ημx$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα [-1,1]
- είναι περιοδική, με περίοδο Τ=2π
- η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:

τιμές x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
τιμές y	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0



Ζ 2 η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot ημ(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot ημ(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[-|\alpha|+\delta, |\alpha|+\delta\right]$
- είναι περιοδική, με περίοδο $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$
- είναι μετατοπισμένη κατά:

$\|\gamma\|$ προς τα αριστερά σε σχέση με την $f(x) = ημx$, αν γ>0	$\|\gamma\|$ προς τα δεξιά σε σχέση με την $f(x) = ημx$, αν γ<0

- Αν α>0, τότε η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:

τιμές x	$-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{T}{4}-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{T}{2}-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{3T}{4}-\frac{\gamma}{\beta}$		$T-\frac{\gamma}{\beta}$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
τιμές y	δ		α+δ		δ		-α+δ		δ

- Αν α<0, τότε η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:

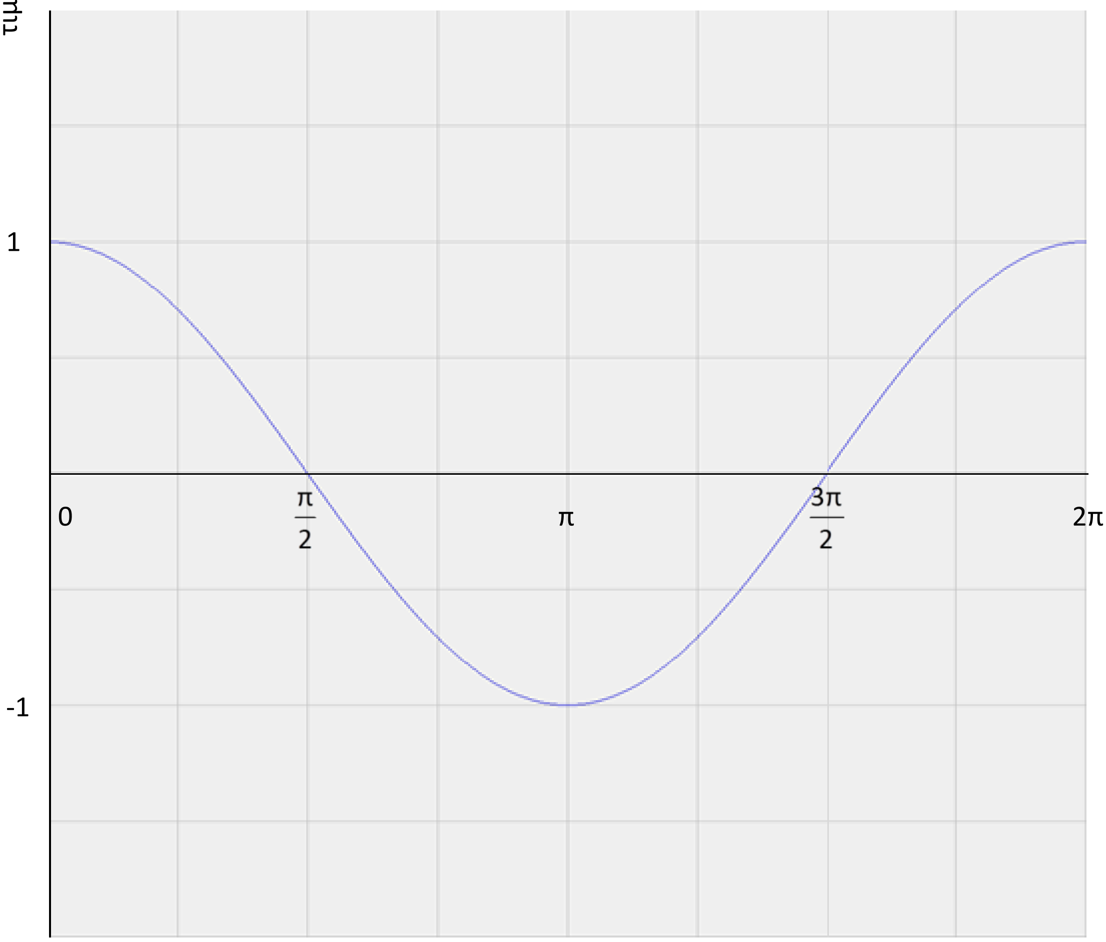
τιμές x	$-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{T}{4}-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{T}{2}-\frac{\gamma}{\beta}$		$\frac{3T}{4}-\frac{\gamma}{\beta}$		$T-\frac{\gamma}{\beta}$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
τιμές y	δ		α+δ		δ		-α+δ		δ

Ζ 3 η συνάρτηση f(x)=συνx

Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$,

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα [-1,1]
- είναι περιοδική, με περίοδο Τ=2π
- η μονοτονία της ακολουθεί τη διαγραμματική αναπαράσταση του παρακάτω πίνακα:

τιμές x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
τιμές y	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1



Ζ 4 η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot συν(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

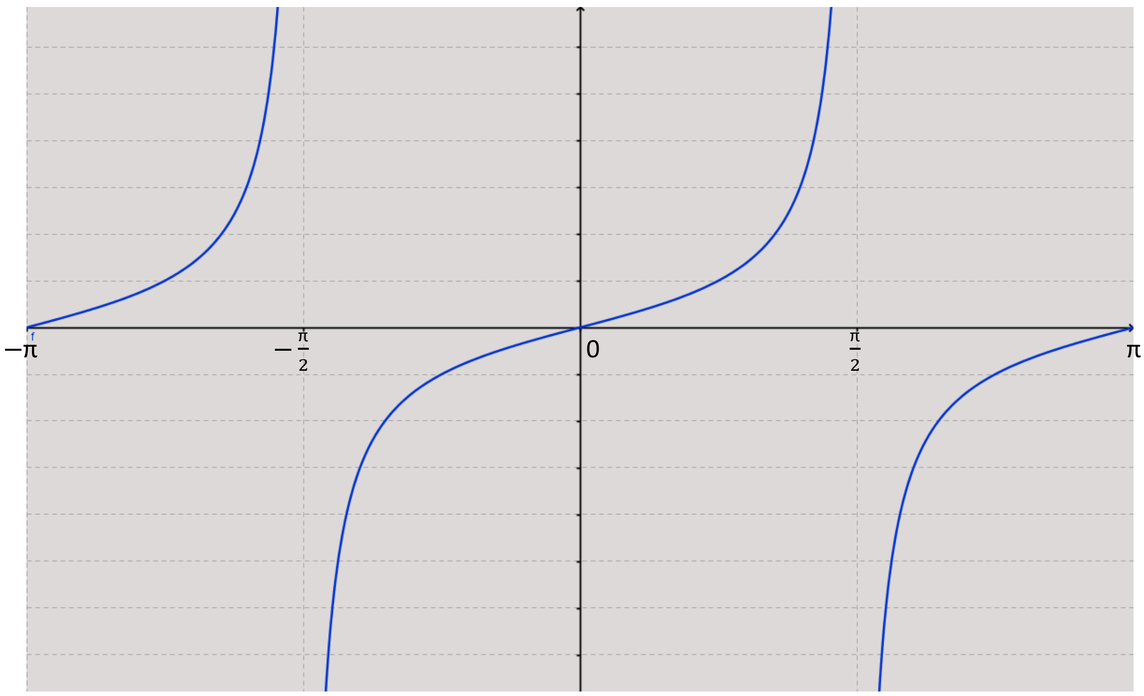
Για τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot συν(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$, χρησιμοποιούμε τις γνώσεις μας για τη μελέτη της $f(x) = \alpha \cdot ημ(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$ (παράγραφος Ζ 2). Συγκεκριμένα μετατρέπουμε την αρχικά δοσμένη $f(x) = \alpha \cdot συν(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$, με βάση το παρακάτω σκεπτικό:

$$f(x) = \alpha \cdot συν(\beta \cdot x + \gamma) + \delta = \alpha \cdot ημ\left(\frac{\pi}{2} - \beta \cdot x - \gamma\right) + \delta = -\alpha \cdot ημ\left(\beta \cdot x + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \delta$$

Ζ 5 η συνάρτηση $f(x) = εφx$

Η συνάρτηση $f(x) = εφx$,

- έχει πεδίο ορισμού $x \neq \kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- είναι περιοδική, με περίοδο Τ=π
- είναι γνήσια αύξουσα και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Ζ 6 η συνάρτηση $f(x) = σφx$

Η συνάρτηση $f(x) = σφx$,

- έχει πεδίο ορισμού $x \neq κ \cdot π$, με $κ \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{R}$
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$
- είναι περιοδική, με περίοδο Τ=π
- είναι γνήσια φθίνουσα και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω: