κεφάλαιο 7

συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Α

βασικές έννοιες

Γραμμικά, λέγονται τα συστήματα εξισώσεων στα οποία οι άγνωστοι εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη. Τα γραμμικά συστήματα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους, τα ονομάζουμε συστήματα 2x2.
Η γενική μορφή που έχει ένα σύστημα 2x2 είναι:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \varepsilon \\ \gamma x + \delta y = \zeta \end{cases}$$

όπου τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta \in \mathbb{R}$.
Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να λυθεί με διάφορους τρόπους. Πριν ξεκινήσουμε όμως τη λύση του πρέπει να το φέρουμε στην παραπάνω μορφή (στην οποία στο πρώτο μέλος των εξισώσεων έχουμε τους αγνώστους και στο δεύτερο τους γνωστούς και μάλιστα το x είναι κάτω από το x και το y κάτω από το y).

Β μέθοδος αντικατάστασης

Στη μέθοδο αντικατάστασης ακολουθούμε την παρακάτω πορεία επίλυσης

Βήμα 1
- λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο.
(συνήθως επιλέγουμε την πιο "βολική[1]" εξίσωση και τον πιο "βολικό" άγνωστο, ώστε να αποφύγουμε τη δημιουργία περίπλοκων παραστάσεων)

Βήμα 2
- αντικαθιστούμε αυτόν τον άγνωστο, ως προς τον οποίο λύσαμε τη μία εξίσωση, στην άλλη εξίσωση

Βήμα 3
- αυτή η δεύτερη εξίσωση πλέον, έχει μόνο έναν άγνωστο και έτσι αφού τη λύσουμε, προσδιορίζουμε την τιμή του

Βήμα 4
- τέλος, αντικαθιστούμε σε οποιαδήποτε από τις εξισώσεις του συστήματος τον άγνωστο που βρήκαμε και υπολογίζουμε την τιμή και του άλλου

[1] Ως «βολική» χαρακτηρίζεται η εξίσωση, η οποία όταν λυθεί ως προς τον έναν άγνωστο ή δεν δημιουργεί κλάσματα ή δημιουργεί κλάσματα με μικρούς παρανομαστές.

παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

Λύση

$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

πιο «βολική» δείχνει η πρώτη εξίσωση, την οποία θα λύσουμε ως προς y

$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x - 5(-1 - 3x) = -14 \end{cases}$

αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση, όπου y το $-1 - 3x$

$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x + 5 + 15x = -14 \end{cases}$

η δεύτερη εξίσωση έχει πλέον μοναδικό άγνωστο το x, οπότε και την λύνουμε

$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 4x + 5 + 15x = -14 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 - 3x \\ 19x = -19 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 - 3x \\ \frac{19}{19}x = \frac{-19}{19} \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - 3x \\ x = -1 \end{cases}$

η τιμή του x έχει προσδιοριστεί. Για να υπολογίσουμε και το y, αντικαταστούμε στην πρώτη εξίσωση, όπου x το -1

$\begin{cases} y = -1 - 3(-1) \\ x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Επομένως η (μοναδική) λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (-1,2)$.

Γ μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Για την επίλυση ενός συστήματος με αυτή τη μέθοδο, ακολουθούμε την παρακάτω πορεία επίλυσης.

βήμα 1

- Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με το συντελεστή του x της δεύτερης εξίσωσης
- Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με τον **αντίθετο** από τον συντελεστή του x της πρώτης

βήμα 2

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (οπότε προκύπτει μια νέα εξίσωση με ένα άγνωστο, την οποία συνδυάζουμε με οποιαδήποτε από τις προηγούμενες μας εξυπηρετεί

βήμα 3

- Επιλύουμε την εξίσωση με τον ένα άγνωστο και ό,τι βρούμε το αντικαθιστούμε στην άλλη

παρατηρήσεις

- Μπορούμε αντί για τους δύο συντελεστές του x, να χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση του συστήματος τους συντελεστές του y.
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με τον **αντίθετο** του συντελεστή του x της δεύτερης, και την δεύτερη εξίσωση με τον συντελεστή του x της πρώτης.
- Αν οι συντελεστές του x (ή του y) είναι από την αρχή αντίθετοι (δηλαδή πριν πολλαπλασιάσουμε) προσθέτουμε κατ’ ευθείαν τις εξισώσεις.

<u>παράδειγμα</u>

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$

<u>λύση</u>

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

Εξυπηρετεί καλύτερα να δουλέψουμε με τους συντελεστές του y. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με -5 και την δεύτερη με -1 (τον αντίθετο του 1).

$$\begin{matrix} (-5)\cdot \\ (-1)\cdot \end{matrix}\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4x - 5y = -14 \end{cases}$$

$$(+)\begin{cases} -15x - 5y = 5 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και ως δεύτερη εξίσωση κρατάμε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες

$$\begin{cases} -19x = 19 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-19}{-19}x = \dfrac{19}{-19} \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ -4x + 5y = 14 \end{cases}$$

Προσδιορίσαμε το x. Τώρα θα το αντικαταστήσουμε στην δεύτερη εξίσωση

$$\begin{cases} x = -1 \\ -4(-1) + 5y = 14 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ 4 + 5y = 14 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ 5y = 10 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{5}{5}y = \dfrac{10}{5} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

δηλαδή η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (-1,2)$.

Δ μέθοδος οριζουσών

Για ένα γραμμικό σύστημα 2x2

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \varepsilon \\ \gamma x + \delta y = \zeta \end{cases}$$

η ορίζουσα είναι

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$$

Εκτός από την ορίζουσα D, το σύστημα έχει επιπλέον τις ορίζουσες D_x και D_y. Για τον υπολογισμό της D_x, αντικαθιστούμε στην D τους συντελεστές του x, με τους σταθερούς όρους και για την D_y τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους. Οπότε:

$$D_x = \begin{vmatrix} \varepsilon & \beta \\ \zeta & \delta \end{vmatrix} = \varepsilon \cdot \delta - \beta \cdot \zeta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \zeta - \varepsilon \cdot \gamma$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών ακολουθούμε την παρακάτω πορεία :

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος

Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία λύση, την

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$$

Αν D=0 και

$$D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0$$

τότε το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

Αν D=0 και

$$D_x = 0 \text{ και } D_y = 0$$

το σύστημα έχει ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ[1]

[1] Εκτός αν $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ και $\varepsilon \neq 0$ ή $\zeta \neq 0$ οπότε είναι αδύνατο

Ε παραμετρικά συστήματα

Παραμετρικά λέγονται τα συστήματα στα οποία εκτός από τους δύο αγνώστους υπάρχει και άλλο γράμμα (συνήθως λ) που ονομάζεται παράμετρος. Και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις παραμετρικές εξισώσεις, η παράμετρος δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως άγνωστος. Πρόκειται για ένα γράμμα, που ανάλογα με την τιμή του, τροποποιείται η ικανότητα ενός συστήματος να λυθεί. Έτσι ενδεχομένως για κάποιες τιμές της παραμέτρου, το σύστημα να δίνει μία μοναδική λύση, ενώ κάποιες άλλες τιμές της να καθιστούν το σύστημα αδύνατο ή με άπειρες λύσεις.
Τα παραμετρικά συστήματα λύνονται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών, με βάση την παρακάτω πορεία:

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες
$$\mathrm{D},\ \mathrm{D_x},\ \mathrm{D_y}$$
του συστήματος

Κάνουμε διερεύνηση, δηλαδή ελέγχουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου ισχύει
$$\mathrm{D}=0 \text{ ή } \mathrm{D}\neq 0$$

Για τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες
$$\mathrm{D}\neq 0$$
το σύστημα έχει μοναδική λύση, την
$$(x,y)=\left(\frac{\mathrm{D_x}}{\mathrm{D}},\frac{\mathrm{D_y}}{\mathrm{D}}\right)$$

Για τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες
$$\mathrm{D}=0$$
το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ ή έχει ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>παράδειγμα</u>

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>λύση</u>

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$$

Κάνουμε διερεύνηση:

- Αν $D \neq 0$ δηλαδή αν $\lambda(\lambda - 2) \neq 0$ οπότε $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (\lambda - 1) + \lambda = -(\lambda - 2)$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 \cdot (2 - \lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

οπότε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\frac{1}{\lambda}$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda^2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\lambda$$

άρα

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$$

- Αν D=0 δηλαδή αν λ=0 ή λ=2 έχουμε:

  - αν λ=0 το σύστημα με αντικατάσταση δίνει $\begin{cases} -y = -1 \\ -2y = 0 \end{cases}$ οπότε έχουμε $\begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ που δεν μπορεί να ισχύει, επομένως το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

- αν λ=2 το σύστημα με αντικατάσταση δίνει $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ οπότε έχουμε

$$\begin{matrix} (-2)\cdot \\ (1)\cdot \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

επομένως:

$$\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ \ \ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $0x + 0y = 0$. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς τον ένα άγνωστο, οπότε: $y = 2x - 1$.

Άρα η μορφή[3] των άπειρων λύσεων του συστήματος είναι:

$$(x, y) = (x, 2x - 1)$$

με $x \in \mathbb{R}$.

[3] Στα συστήματα με άπειρες λύσεις, δεν αρκεί να αναφέρουμε ότι το πλήθος των λύσεων είναι άπειρο. Θα πρέπει να αναφέρουμε τη μορφή που έχουν οι άπειρες λύσεις. Στο παράδειγμα που δόθηκε, το ζεύγος τιμών $(x, y) = (5,9)$ αποτελεί λύση, αφού υπακούει στη μορφή $(x, y) = (x, 2x - 1)$, ενώ το ζεύγος τιμών $(x, y) = (3,7)$ δεν αποτελεί λύση του συστήματος (επομένως δεν ανήκει στις άπειρες λύσεις), αφού δεν επαληθεύει τη μορφή $(x, y) = (x, 2x - 1)$. Σε αντίθεση λοιπόν με μια εξίσωση απείρων λύσεων, στην οποία οποιαδήποτε τιμή του x την επαληθεύει, ένα σύστημα άπειρων λύσεων επαληθεύεται για συγκεκριμένη μορφή άπειρων ζευγών λύσεων.