κεφάλαιο 6

απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Α

βασικές έννοιες

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x, εκφράζει την απόσταση του αριθμού αυτού από το μηδέν. Επομένως τα αναμενόμενα αποτελέσματα της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού, είναι θετικά ή μηδέν (αφού δεν υπάρχει αρνητική απόσταση).

Έτσι, η απόλυτη τιμή του αριθμού 3, συμβολίζεται με $|3|$ και ισούται με 3, αφού η απόσταση του αριθμού 3 από το μηδέν είναι 3.

Όμοια, η απόλυτη τιμή του αριθμού -5, συμβολίζεται με $|-5|$ και ισούται με 5, αφού η απόσταση του αριθμού -5 από το μηδέν είναι 5.

Ο προσδιορισμός της απόλυτης τιμής αριθμών είναι εξαιρετικά απλός. Όμως ο υπολογισμός της απόλυτης τιμής ποσοτήτων που περιλαμβάνουν το x απαιτούν διερεύνηση. Αυτό οφείλεται στο ότι ανάλογα με τις τιμές του x, η ποσότητα μέσα στο απόλυτο, μπορεί άλλοτε να λαμβάνει θετικές τιμές, άλλοτε αρνητικές και άλλοτε να μηδενίζεται.

Το γενικό σκεπτικό της διερεύνησης φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.

βήμα 1

- Ελέγχουμε πότε η ποσότητα εντός του απολύτου είναι θετική, λύνοντας την ανίσωση: ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ > 0

βήμα 2α

- Για τις τιμές του x για τις οποίες η ποσότητα μέσα στο απόλυτο δίνει θετικά αποτελέσματα (ή μηδέν), η απόλυτη τιμή της ποσότητας ισούται με την ποσότητα χωρίς το απόλυτο.

βήμα 2β

- Για τις τιμές του x για τις οποίες η ποσότητα μέσα στο απόλυτο δίνει αρνητικά αποτελέσματα, η απόλυτη τιμή της ποσότητας ισούται με την αντίθετη της ποσότητας εντός του απολύτου παράδειγμα

Να διερευνηθούν τα δυνατά αποτελέσματα της $|3-2x|$.

Λύση

(βήμα 1) Λύνουμε την ανίσωση $3-2x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

(βήμα 2α) Για $x \leq \frac{3}{2}$, έχουμε $|3-2x| = 3-2x$

(βήμα 2β) Για $x > \frac{3}{2}$, έχουμε $|3-2x| = -3+2x$

Επομένως συνοψίζοντας: $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & \text{όταν } x \leq \frac{3}{2} \\ -3+2x, & \text{όταν } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Ο ορισμός της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού x, είναι επομένως:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -x, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Β ιδιότητες των απολύτων

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες των απολύτων, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

$$|\alpha| \geq 0$$

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$$

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$$

$$|\alpha|^2 = \alpha^2$$

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Γ — εξισώσεις με απόλυτα

Όταν σε κάποια εξίσωση περιλαμβάνεται άγνωστος x μέσα σε απόλυτο, τότε ελέγχουμε σε ποια από τις παρακάτω κατηγορίες ανήκει και λύνουμε με βάση την προτεινόμενη ανά περίπτωση μέθοδο.

Περίπτωση 1η

απόλυτο = αριθμός

Προσοχή! Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και όσες εξισώσεις περιλαμβάνουν περισσότερα του ενός απολύτου, τα οποία όμως περιέχουν την ίδια ποσότητα ή αντίθετες ποσότητες ή πολλαπλάσια της ίδιας ποσότητας.

$|x| = \alpha$

- αν $\alpha \geq 0$ → $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- αν α<0 → ΑΔΥΝΑΤΗ

<u>παραδείγματα</u>

- $|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 3$
- $|5 - 4x| = 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lll} 5 - 4x = 2 \Leftrightarrow & \text{ή} & 5 - 4x = -2 \Leftrightarrow \\ -4x = 2 - 5 \Leftrightarrow & \text{ή} & -4x = -2 - 5 \Leftrightarrow \\ -4x = -3 \Leftrightarrow & \text{ή} & -4x = -7 \Leftrightarrow \\ x = \dfrac{3}{4} & \text{ή} & x = \dfrac{7}{4} \end{array}$$

- $|4x - 7| = -1 \Leftrightarrow$ Αδύνατη

Περίπτωση 2η

απόλυτο 1 = απόλυτο 2

|ποσότητα 1| = |ποσότητα 2|

ποσότητα 1 = ± ποσότητα 2

<u>παράδειγμα</u>

$|x-2| = |3-2x| \Leftrightarrow$

$x-2 = 3-2x \Leftrightarrow$ ή $x-2 = -3+2x \Leftrightarrow$

$x+2x = 3+2 \Leftrightarrow$ ή $x-2x = -3+2 \Leftrightarrow$

$3x = 5 \Leftrightarrow$ ή $-x = -1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{5}{3}$ ή $x = 1$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και εξισώσεις της μορφής

απόλυτο 1 = αριθμός · απόλυτο 2

με την προϋπόθεση ο αριθμός να είναι θετικός.

Αν ο αριθμός είναι αρνητικός η εξίσωση είναι αδύνατη, με μοναδική εξαίρεση την περίπτωση και οι δύο εντός απολύτων ποσότητες να μπορούν να μηδενιστούν ταυτόχρονα.

Περίπτωση 3η

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι εξισώσεις που έχουν δύο ή παραπάνω διαφορετικά απόλυτα (δηλαδή απόλυτα που δεν περιέχουν τις ίδιες, αντίθετες ή πολλαπλάσιες ποσότητες) **και** ποσότητες εκτός των απολύτων.

Όταν συμβαίνει αυτό αναλύουμε το κάθε απόλυτο και στη συνέχεια επιλύουμε την εξίσωση σε κάθε διάστημα χωριστά, με «πινακάκι».

<u>παράδειγμα</u>

- $|x-3|-2|1-x|=3x-2$

Αναλύουμε το κάθε απόλυτο χωριστά:

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, \text{όταν } x>3 \\ -x+3, \text{όταν } x\leq 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad |1-x|=\begin{cases} 1-x, \text{όταν } x\leq 1 \\ -1+x, \text{όταν } x>1 \end{cases}$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα τιμών:

	$-\infty$ ... 1	1 ... 3	3 ... $+\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$\lvert 1-x\rvert$	$1-x$	$-1+x$	$-1+x$

Διακρίνουμε περιπτώσεις και για κάθε μία επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει:

- αν $x\leq 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$|x-3|-2|1-x|=3x-2 \Leftrightarrow$$
$$(-x+3)-2(1-x)=3x-2 \Leftrightarrow$$
$$-x+3-2+2x=3x-2 \Leftrightarrow$$
$$-x+2x-3x=-3+2-2 \Leftrightarrow$$
$$-2x=-3 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{3}{2}$$

Η οποία απορρίπτεται αφού δεν πληροί τον περιορισμό $x\leq 1$.

- αν $1 < x \leq 3$ η εξίσωση γίνεται:

$$|x-3| - 2|1-x| = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$(-x+3) - 2(-1+x) = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$-x + 3 + 2 - 2x = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$-x - 2x - 3x = -2 - 3 - 2 \Leftrightarrow$$
$$-6x = -7 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{7}{6}$$

Η οποία είναι δεκτή, αφού βρίσκεται εντός ορίων του περιορισμού $1 < x \leq 3$.

- αν $x > 3$ η εξίσωση γίνεται:

$$|x-3| - 2|1-x| = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$(x-3) - 2(-1+x) = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$x - 3 + 2 - 2x = 3x - 2 \Leftrightarrow$$
$$x - 2x - 3x = -2 + 3 - 2 \Leftrightarrow$$
$$-4x = -1 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1}{4}$$

Η οποία απορρίπτεται, αφού δεν πληροί τον περιορισμό $x > 3$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν σε κάποιο στάδιο της διερεύνησης προκύψει αδύνατη εξίσωση, αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατη για αυτό και μόνο το στάδιο και όχι απαραίτητα συνολικά για όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Αν κατά την επίλυση κάποιας από τις υποπεριπτώσεις διαστημάτων προκύψει εξίσωση με άπειρες λύσεις, αυτό σημαίνει ότι ολόκληρο αυτό το διάστημα αποτελεί λύση της και όχι απαραίτητα όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Δ ανισώσεις με απόλυτα

Όταν σε κάποια ανίσωση υπάρχει άγνωστος x μέσα σε απόλυτο, τότε για τη λύση της εφαρμόζουμε κάτι από τα παρακάτω:

Περίπτωση 1η

απόλυτο ≥ αριθμός

Προσοχή! Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και όσες ανισώσεις περιλαμβάνουν περισσότερα του ενός απολύτου, τα οποία όμως περιέχουν την ίδια ποσότητα ή αντίθετες ποσότητες ή πολλαπλάσια της ίδιας ποσότητας.

$|x| \geq \alpha$

- αν $\alpha \geq 0$ → $x \leq -\alpha$ ή $x \geq \alpha$
- αν $\alpha<0$ → αόριστη

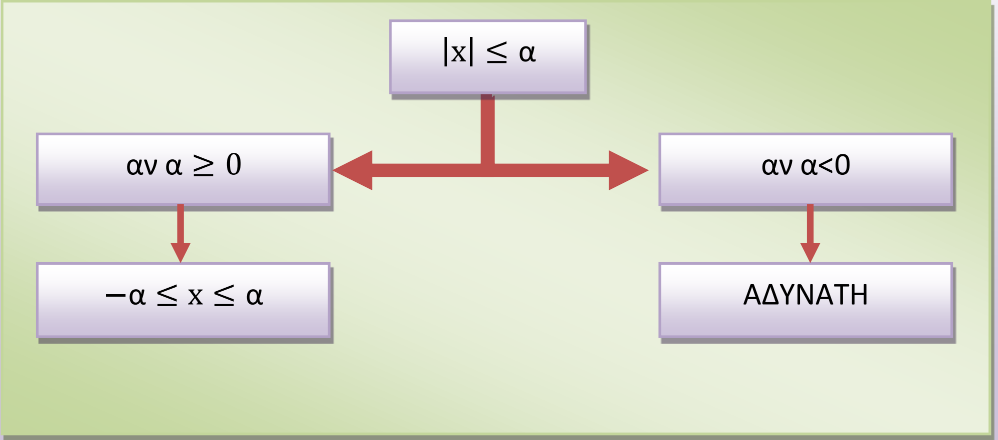
<u>παραδείγματα</u>

- $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -4$ ή $x \geq 4$
- $|4-3x| \geq -7 \Leftrightarrow$ αόριστη

Περίπτωση 2η

απόλυτο ≤ αριθμός

Προσοχή! Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και όσες ανισώσεις περιλαμβάνουν περισσότερα του ενός απολύτου, τα οποία όμως περιέχουν την ίδια ποσότητα ή αντίθετες ποσότητες ή πολλαπλάσια της ίδιας ποσότητας.



<u>παραδείγματα</u>

- $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$
- $|7+3x| \leq -5 \Leftrightarrow$ αδύνατη

Περίπτωση 3η

Στην κατηγορία υπάγονται οι ανισώσεις που έχουν δύο ή παραπάνω διαφορετικά απόλυτα **και** ποσότητες εκτός των απολύτων.

Σε αυτή την περίπτωση αναλύουμε το κάθε απόλυτο χωριστά και επιλύουμε την ανίσωση σε κάθε διάστημα, ελέγχοντας αν οι λύσεις που προκύπτουν γίνονται ή όχι δεκτές από τον περιορισμό του κάθε διαστήματος.

Οι ανισώσεις αυτές ξεφεύγουν από την προτεινόμενη προς παράδοση ύλη, εντούτοις σε αρκετά σχολεία διδάσκονται.

Ε απόλυτο, απόσταση και διάστημα

Συχνά χρειάζεται να μετατρέψουμε μια έκφραση δοσμένη με μορφή απόλυτης τιμής, σε έκφραση απόστασης από το μηδέν ή σε μορφή διαστήματος τιμών. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ισοδυναμία μετατροπής της μιας μορφής έκφρασης στην άλλη.

Έκφραση με απόλυτο	Έκφραση με απόσταση	Έκφραση με διάστημα
$\lvert x\rvert = \beta$	$d(x,0) = \beta$	$x = \beta$ ή $x = -\beta$
$\lvert x-\alpha\rvert = \beta$	$d(x,\alpha) = \beta$	$x = \beta+\alpha$ ή $x = -\beta+\alpha$
$\lvert x-\alpha\rvert > \beta$	$d(x,\alpha) > \beta$	$x \in (-\infty, -\beta+\alpha) \cup (\beta+\alpha, +\infty)$
$\lvert x-\alpha\rvert \geq \beta$	$d(x,\alpha) \geq \beta$	$x \in (-\infty, -\beta+\alpha] \cup [\beta+\alpha, +\infty)$
$\lvert x-\alpha\rvert < \beta$	$d(x,\alpha) < \beta$	$x \in (-\beta+\alpha, \beta+\alpha)$
$\lvert x-\alpha\rvert \leq \beta$	$d(x,\alpha) \leq \beta$	$x \in [-\beta+\alpha, \beta+\alpha]$

Στα παραπάνω, πρέπει να ισχύει: $\beta \geq 0$.