κεφάλαιο 5 — πολυωνυμικές εξισώσεις ανώτερου βαθμού

Α — τρόποι επίλυσης

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις έχουν μορφή:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \alpha_\nu \mathrm{x}^\nu + \alpha_{\nu-1}\mathrm{x}^{\nu-1}\alpha_{\nu-2}\mathrm{x}^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1\mathrm{x} + \alpha_0$$

Για την επίλυσή τους δεν υπάρχει μια συγκεκριμένη μέθοδος, αλλά διάφορες προτεινόμενες πορείες, που άλλοτε βοηθούν και άλλοτε όχι.

Η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος είναι η παρακάτω:

βήμα 1
- Προσδιορίζουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου α_0 (για παράδειγμα αν ο σταθερός όρος είναι το 8, οι διαιρέτες του είναι οι αριθμοί ±1, ±2, ±4, ±8)

βήμα 2
- Δοκιμάζουμε έναν-έναν τους διαιρέτες, αντικαθιστώντας την τιμή τους στο x. Αν κάποιος από αυτούς μηδενίσει το πολυώνυμο, σημαίνει ότι αποτελεί ρίζα (λύση) του πολυωνύμου.

βήμα 3
- Για την τιμή που προσδιορίσαμε να μηδενίζεται το πολυώνυμο, κάνουμε σχήμα Horner.

βήμα 4
- Γράφουμε σε παραγοντοποιημένη μορφή το πολυώνυμο.

βήμα 5
- Στο πολυώνυμο που λάβαμε ως πηλίκο από το σχήμα Horner, επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 ως 4, ξεκινώντας αυτή τη φορά με δοκιμές που εξαιρούν όσες τιμές δεν μηδένισαν το αρχικό πολυώνυμο[1]

[1] Αν για παράδειγμα ένας από τους διαιρέτες του σταθερού όρου του αρχικού πολυωνύμου ήταν ο αριθμός 2, και ενώ ελέγχθηκε, δεν μηδένιζε το πολυώνυμο, αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το 2 δεν αποτελεί ρίζα (λύση), ούτε του διαιρέτη που λάβαμε από το σχήμα Horner, επομένως το 2 δεν θα επανελεγχθεί.

Β σχήμα Horner

Το σχήμα Horner είναι μια χρήσιμη, εύκολη και γρήγορη μέθοδος για να προσδιορίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου οποιουδήποτε βαθμού, με ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο διαιρέτης θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι της μορφής $\alpha x+\beta$.

Για το σχήμα Horner χρησιμοποιούμε τους συντελεστές των πολυωνύμων. Αν κάποια ενδιάμεση δύναμη (μεταξύ του μονωνύμου της μέγιστης δύναμης και του σταθερού όρου) απουσιάζει, θεωρούμε ότι ο συντελεστής του συγκεκριμένου όρου είναι μηδέν (0) και ΔΕΝ ΠΑΡΑΛΕΙΠΕΤΑΙ.

Στη θέση του διαιρέτη χρησιμοποιούμε την τιμή του x που τον μηδενίζει, δηλαδή $-\frac{\beta}{\alpha}$.

<u>παράδειγμα</u>

Να προσδιοριστεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)=x^3-2x-4$ με το πολυώνυμο $Q(x)=x+1$

<u>λύση</u>

Παρατηρούμε ότι στο πολυώνυμο P(x), απουσιάζει το μονώνυμο του x^2, επομένως ο συντελεστής του είναι 0.

Καταγράφουμε το Horner:

$P(x)=1x^3+0x^2-2x-4$ $\qquad Q(x)=x+1$

1		0		-2		-4	-1
	$\cdot(-1)$	-1	$\cdot(-1)$	1	$\cdot(-1)$	-1	
1		-1		-1		-5	

Αυτοί οι αριθμοί θα αποτελέσουν τους συντελεστές των όρων του πηλίκου. Το πηλίκο θα είναι κατά ένα βαθμό μικρότερο σε σχέση με τον διαιρετέο.

Αυτός ο τελευταίος αριθμός, αποτελεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το Q(x)

Εδώ βάζουμε την τιμή του x η οποία μηδενίζει τον διαιρέτη

Η λογική του Horner είναι η εξής:

Τον πρώτο από τους συντελεστές τον αφήνουμε αναλλοίωτο και απλώς τον «κατεβάζουμε». Από εκεί και πέρα, κάθε φορά που «ανηφορίζουμε», πολλαπλασιάζουμε με την τιμή του x που μηδενίζει τον διαιρέτη και κάθε φορά που κατεβαίνουμε προσθέτουμε στον αντίστοιχο συντελεστή, τον αριθμό που έχει προκύψει ακριβώς από κάτω του.

Με βάση λοιπόν αυτά, για τη συγκεκριμένη διαίρεση λάβαμε:

$$\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x} - 4 = \underbrace{(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1)}\underbrace{(\mathrm{x} + 1)}\underbrace{- 5}$$

Αυτό είναι το πηλίκο. Πρόκειται για πολυώνυμο κατά ένα βαθμό πιο μικρό από τον διαιρετέο (που ήταν $3^{ου}$ βαθμού), με συντελεστές όρων 1, -1 και -1, όπως προέκυψαν από το σχήμα Horner.

Αυτός είναι ο διαιρέτης

Αυτό είναι το υπόλοιπο

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων προκύψει μηδέν, τότε η διαίρεσή τους είναι τέλεια.

Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις:

Το P(x) διαιρείται (ακριβώς) με το x-ρ	P(ρ)=0	Το P(x) έχει παράγοντα το $\mathrm{x} - \rho$	$\mathrm{P}(\emptyset)\|(\mathrm{x} - \rho)$