κεφάλαιο 4

# τριώνυμο

## Α επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού στην πλήρη της μορφή ονομάζεται τριώνυμο, γιατί αποτελείται από τρία μονώνυμα. Η γενική μορφή της είναι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ με } \alpha\neq 0$$

Η ακολουθία βημάτων για την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η παρακάτω:

Φέρνουμε την εξίσωση (αν δεν είναι ήδη) στη μορφή

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

**Αν Δ>0**

τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** (λύσεις), **άνισες** μεταξύ τους

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

**Αν Δ=0**

τότε η εξίσωση έχει **μία ρίζα** (λύση) **διπλή**

$$x_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

**Αν Δ<0**

τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, έχει δύο λύσεις, τις $x_1=\frac{-\beta+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

## Β ειδικές περιπτώσεις εξίσωσης δευτέρου βαθμού

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η εξίσωση δευτέρου βαθμού δεν είναι πλήρης, δηλαδή απουσιάζει κάποιο από τα μονώνυμα πρώτου ή μηδενικού βαθμού (σταθερός όρος). Είναι προφανές ότι αν απουσιάζει το μονώνυμο δευτέρου βαθμού, τότε η εξίσωση δεν είναι δευτέρου βαθμού και για τη λύση της ακολουθούμε την πορεία που προβλέπεται για τις εξισώσεις πρώτου βαθμού. Η γενική πορεία επίλυσης για την εξίσωση δευτέρου βαθμού που περιγράψαμε προηγούμενα, βρίσκει εφαρμογή και στις ειδικές περιπτώσεις που θα μελετήσουμε, εντούτοις θεωρείται ταχύτερη η λύση τους με τις παρακάτω μεθόδους.

αν β=0 τότε η μορφή που λαμβάνει η εξίσωση είναι $αx^2+γ=0$

η πορεία επίλυσης σε αυτή την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$αx^2+γ=0 \Leftrightarrow αx^2=-γ \Leftrightarrow x^2=-\frac{γ}{α}$$

αν $-\frac{γ}{α} \geq 0$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{γ}{α}}$$

αν $-\frac{γ}{α} < 0$

η εξίσωση είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**

αν γ=0 τότε η μορφή που λαμβάνει η εξίσωση είναι $αx^2+βx=0$

η πορεία επίλυσης σε αυτή την περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$αx^2+βx=0 \Leftrightarrow x(αx+β)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\frac{β}{α}$$

μία τέτοια εξίσωση δεν μπορεί ποτέ να είναι αδύνατη

# Γ παραγοντοποίηση τριωνύμου

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου, μας βοηθάει να μετατρέπουμε τα μονώνυμα του σε γινόμενο όρων πρώτου βαθμού. Έτσι επιλύονται ευκολότερα ανισώσεις δευτέρου βαθμού και απλοποιούνται κλάσματα με πολυωνυμικούς όρους.

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο, θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις ρίζες (λύσεις) του. Στη συνέχεια, βασιζόμαστε στο διάγραμμα του πίνακα που ακολουθεί.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

| αν Δ>0 | αν Δ=0 | αν Δ<0 |
|---|---|---|
| τότε το τριώνυμο λαμβάνει τη μορφή: $\alpha(x-x_1)(x-x_2)=0$ όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες (λύσεις) του τριωνύμου | τότε το τριώνυμο λαμβάνει τη μορφή: $\alpha\left(x-x_{1,2}\right)^2=0$ όπου $x_{1,2}$ η διπλή ρίζα (λύση) του τριωνύμου | τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται |

# Δ πρόσημο τριωνύμου

Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, ανεξάρτητα από το αν έχει ή όχι τιμές μηδενισμού (ρίζες), για κάθε τιμή που αντικαθιστούμε στη θέση του x, μας δίνει ένα αποτέλεσμα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι άλλοτε θετικό, άλλοτε αρνητικό και άλλοτε μηδέν. Το παρακάτω διάγραμμα μας βοηθάει να προβλέψουμε το πρόσημο αυτού του αποτελέσματος.

$αx^2 + βx + γ$ ⇒

### αν Δ>0

| $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ομόσημο του α | 0 | ετερόσημο του α | 0 | ομόσημο του α | |

### αν Δ=0

| $-\infty$ | | $x_{1,2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| | ομόσημο του α | 0 | ομόσημο του α | |

### αν Δ<0

| $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|
| | ομόσημο του α | |

# Ε τύποι Vieta

Αν έχουμε ένα τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, το οποίο έχει λύσεις, τότε ένας σύντομος τρόπος για να τις προσδιορίσουμε, χωρίς τη χρήση διακρίνουσας, είναι με τη βοήθεια των τύπων του Vieta.

Στην ουσία για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου σκεφτόμαστε ως εξής:

**βήμα 1** ψάχνουμε δύο αριθμούς που όταν τους προσθέτουμε θα μας δίνουν $S=-\frac{\beta}{\alpha}$

**βήμα 2** ψάχνουμε δύο αριθμούς που όταν τους πολλαπλασιάζουμε θα μας δίνουν $P=\frac{\gamma}{\alpha}$

Έτσι, εύκολα το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μπορεί τελικά να μετασχηματιστεί σε

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

Τα παραπάνω αποδεικνύονται με βάση την πορεία που ακολουθεί:

Έχουμε ένα τριώνυμο της γενικής μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με ρίζες (λύσεις) τις $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Το άθροισμα των δύο ριζών το συμβολίζουμε S και το γινόμενό τους P, δηλαδή: $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$.

Όμως $S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$

και $P=x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\beta^2-\sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\left(\beta^2-4\alpha\cdot\gamma\right)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$

Τότε το αρχικό τριώνυμο μπορούμε να το γράψουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x^2}{\alpha}+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{0}{\alpha} \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

Αν ένα τριώνυμο της γενικής μορφής $\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$

έχει $\boxed{\Delta\geq 0}$ δηλαδή έχει λύσεις $x_1$ και $x_2$, τότε:

- Αν S=0, τότε οι λύσεις είναι αντίθετες
- Αν P=1, τότε οι λύσεις είναι αντίστροφες
- Αν P<0, οι λύσεις είναι ετερόσημες
- Αν P>0, οι λύσεις είναι ομόσημες
- Αν P>0 και S>0, οι λύσεις είναι θετικές
- Αν P>0 και S<0, οι λύσεις είναι αρνητικές
- Αν P<0 και S>0, οι λύσεις είναι ετερόσημες, με τη θετική λύση να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από την αρνητική
- Αν P<0 και S<0, οι λύσεις είναι ετερόσημες, με την αρνητική λύση να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τη θετική

# ΣΤ η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει:

- Πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
- Σύνολο τιμών

| αν α>0 | αν α<0 |
|---|---|
| το σύνολο $[-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty)$ | το σύνολο $(-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}]$ |

- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Ακρότατο το σημείο $A(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ το οποίο

| αν α>0 | αν α<0 |
|---|---|
| είναι ελάχιστο | είναι μέγιστο |

- Κοινό σημείο με τον άξονα y'y το $B\big(0, f(0)\big)$
- Κοινά σημεία με τον άξονα x'x: Για να βρούμε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, με τον άξονα x'x, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Ανάλογα με τον αν προκύψουν δύο λύσεις ($x_1$, $x_2$ αν Δ>0), μία λύση ($x_{1,2}$ αν Δ=0) ή καμία λύση (αν Δ<0) διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

| αν $\Delta>0$ | αν $\Delta=0$ | αν $\Delta<0$ |
|---|---|---|
| Δύο κοινά σημεία, τα $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ | Ένα κοινό σημείο, το $A\big(x_{1,2}, 0\big)$ | Κανένα κοινό σημείο με τον άξονα x'x |

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μπορεί με διαδοχικά βήματα να γραφεί:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x\right) + \gamma$$

$$f(x) = \alpha \cdot \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right) + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$f(x) = \alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

$$f(x) = \alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

$$f(x) = \alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, σε σχέση με τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι:

- Μετατοπισμένη κατά $\frac{\beta}{2\alpha}$ μονάδες πιο αριστερά, αν $\frac{\beta}{2\alpha} > 0$
- Μετατοπισμένη κατά $\frac{\beta}{2\alpha}$ μονάδες πιο δεξιά, αν $\frac{\beta}{2\alpha} < 0$

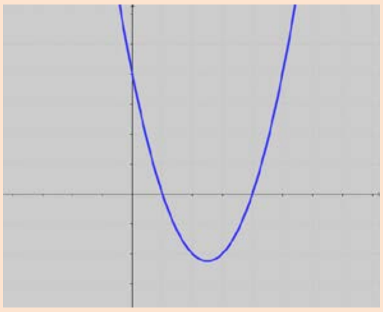
- Μετατοπισμένη κατά $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ πιο πάνω, αν $-\frac{\Delta}{4\alpha} > 0$
- Μετατοπισμένη κατά $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ πιο κάτω, αν $-\frac{\Delta}{4\alpha} < 0$

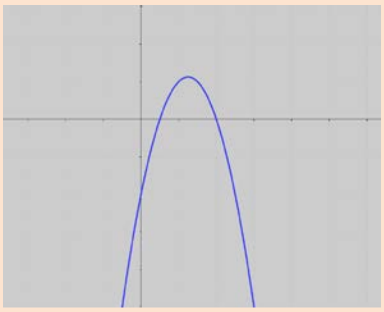
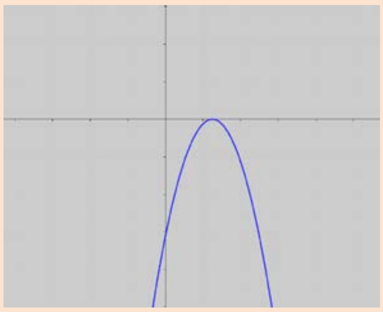
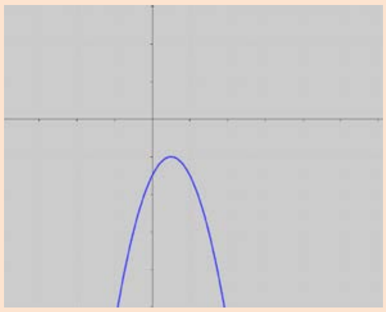
- Πιο «στενή», δηλαδή πιο απότομη όταν $|\alpha| > 1$
- Πιο «ανοιχτή», δηλαδή πιο απλωμένη όταν $|\alpha| < 1$

- Επιπλέον, αν α<0 τότε η γραφική παράσταση έχει σχήμα αντίστροφο

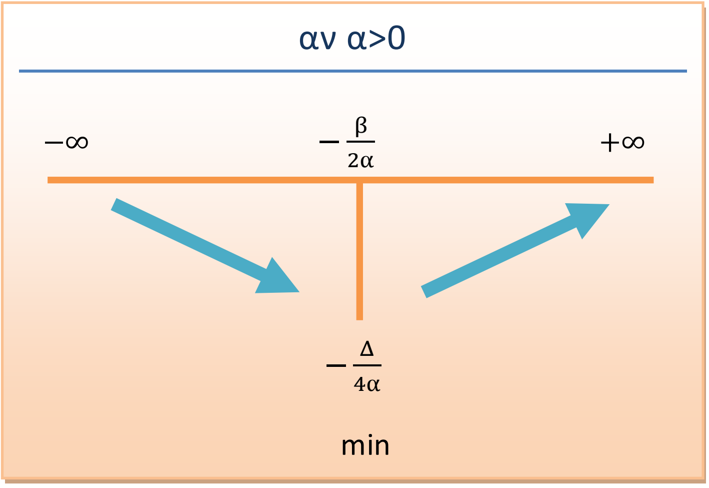
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει σχήμα παραβολής.

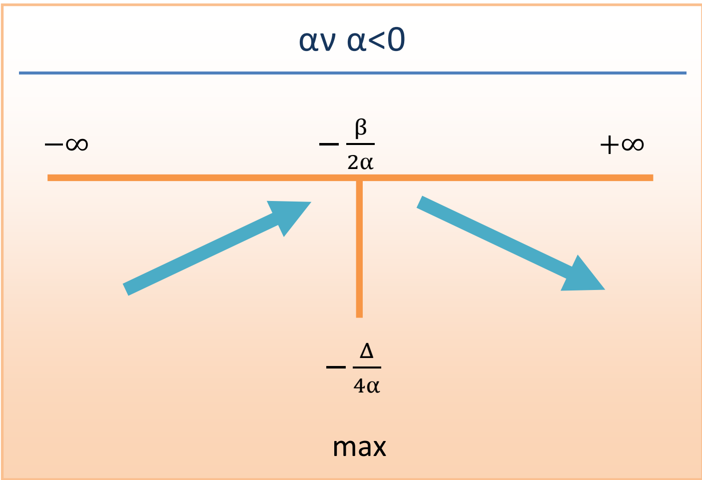
Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει την παρακάτω μορφή:

| αν α>0 | | |
|---|---|---|
| αν Δ>0 | αν Δ=0 | αν Δ<0 |
|  |  |  |

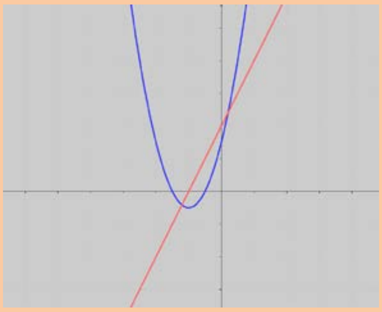
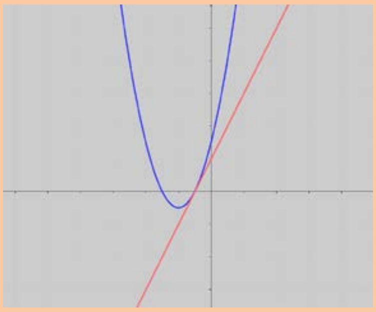
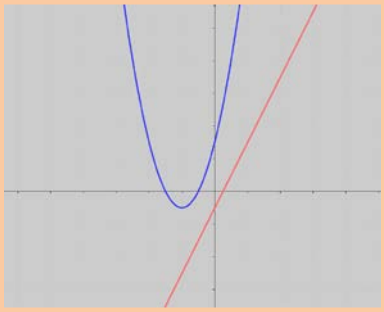
| αν α<0 | | |
|---|---|---|
| αν Δ>0 | αν Δ=0 | αν Δ<0 |
|  |  |  |

Η μονοτονία της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ακολουθεί τη μορφή που φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:



- Με δεδομένη τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και την ευθεία $y = \delta x + \varepsilon$, και με ζητούμενο την εύρεση των (πιθανών) κοινών τους σημείων, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Ανάλογα με το πλήθος των λύσεων που προκύπτουν, έχουμε τις παρακάτω δυνατές γεωμετρικές ερμηνείες:

| αν προκύψουν δύο σημεία | αν προκύψει ένα σημείο | αν δεν προκύψει σημείο |
|---|---|---|
|  |  |  |
| η ευθεία τέμνει την παραβολή | η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή | η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία |