κεφάλαιο 10 — εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Α — εκθετική συνάρτηση

Εκθετικές ονομάζονται οι συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή βρίσκεται στον εκθέτη ενός θετικού αριθμού.

Μορφή: $f(x) = \alpha^x$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$

Σύνολο τιμών: $(0, +\infty)$

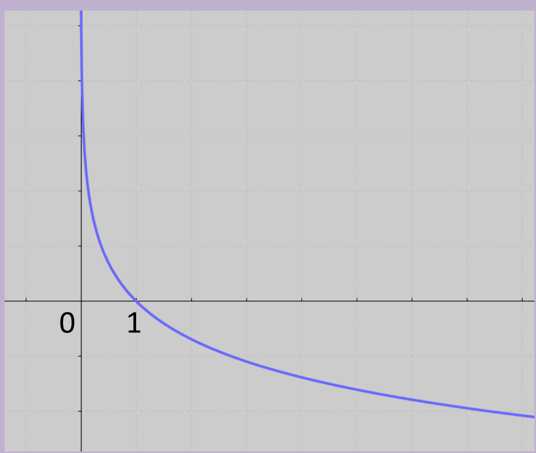
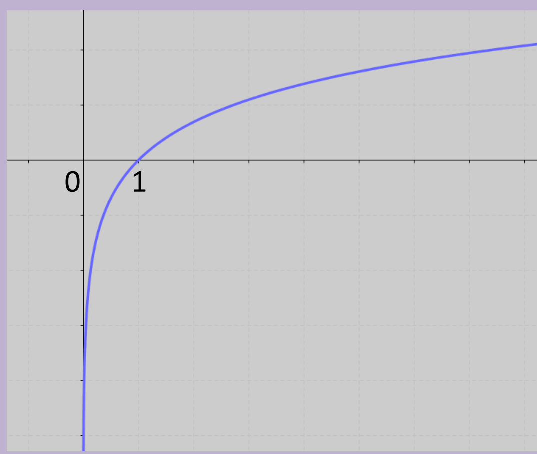
Η εκθετική είναι συνάρτηση "1-1", επομένως ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \overset{"1-1"}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2$$

Κοινό σημείο με άξονα y'y: $A(0,1)$

αν 0<α<1	αν α>1
Μονοτονία: γνήσια φθίνουσα	Μονοτονία: γνήσια αύξουσα
$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \overset{\searrow}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$	$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$
	
τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα x'x στο $+\infty$	τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα x'x στο $-\infty$

Β λογαριθμική συνάρτηση

Λογαριθμικές ονομάζονται οι συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή βρίσκεται μέσα σε λογάριθμο.	
Μορφή: $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$	
Πεδίο ορισμού: $(0, +\infty)$	
Σύνολο τιμών: $\mathbb{R}$	
Η λογαριθμική είναι συνάρτηση "1-1", επομένως ισχύει $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \overset{"1-1"}{\Longleftrightarrow} x_1 = x_2$	
Κοινό σημείο με άξονα x'x: $A(0,1)$	
αν 0<α<1	αν α>1
Μονοτονία: γνήσια φθίνουσα	Μονοτονία: γνήσια αύξουσα
$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2 \overset{\searrow}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$	$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 > x_2$
	
τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα y'y στο 0	τείνει ασυμπτωτικά στον άξονα y'y στο 0

Η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης, είναι η λογαριθμική συνάρτηση και η αντίστροφη της λογαριθμικής, είναι η εκθετική συνάρτηση. Αυτό σημαίνει:

- ότι οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου, δηλαδή την ευθεία y=x.
- όταν το σημείο $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της εκθετικής, τότε το σημείο $\mathrm{A}'(\mathrm{y}, \mathrm{x})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της αντίστοιχης λογαριθμικής και το αντίστροφο.
- η εκθετική και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας

Γ ιδιότητες λογαρίθμων

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

$$\log_{\alpha}\theta = x \Leftrightarrow \alpha^{x} = \theta \text{ με } 0 < \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

$$\log_{10}\theta = \log\theta$$

$$\log_{e}\theta = \ln\theta$$

$$\log_{\alpha}x + \log_{\alpha}y = \log_{\alpha}(x \cdot y)$$

$$\log_{\alpha}x - \log_{\alpha}y = \log_{\alpha}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_{\alpha}x^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha}x$$

$$\log_{\beta}\theta = \frac{\log_{\alpha}\theta}{\log_{\alpha}\beta} \text{ όπου } 1 \neq \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0$$

$$\log 10 = 1$$

$$\ln e = 1$$

$$\log 1 = \ln 1 = 0$$