κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

A

ιδιότητες δυνάμεων

Οι κυριότερες ιδιότητες των δυνάμεων περιέχονται στον παρακάτω πίνακα.

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots}_{\nu \text{ φορές}}, \nu \in \mathbb{N}$$

$$\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}$$

$$\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$$

$$\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

$$\alpha^{0} = 1$$

$$\alpha^{1} = \alpha$$

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^{x}}$$

$$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

$$\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-x} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x}$$

Β αλγεβρικές ταυτότητες

Οι κυριότερες αλγεβρικές ταυτότητες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\cdot\alpha^2\cdot\beta+3\cdot\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2-\cdots+\alpha\cdot\beta^{\nu-2}-\beta^{\nu-1})$$

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\cdot\beta+\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2+\cdots+\alpha\cdot\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+2\cdot\alpha\cdot\gamma+2\cdot\beta\cdot\gamma$$

Γ ρίζα πραγματικού αριθμού

Οι κυριότερες ιδιότητες της (τετραγωνικής ή ανώτερης τάξης) ρίζας πραγματικού αριθμού, παρουσιάζονται παρακάτω.

$$\sqrt{x}^2 = x \text{ με } x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$\sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha^{\nu \cdot \rho}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\rho}}$$

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ χρειάζεται να επιδεικνύουμε στην εφαρμογή της τρίτης και της τέταρτης ιδιότητας, γιατί ενδεχομένως μπορούμε να οδηγηθούμε σε λάθη:

Για παράδειγμα, πάντα ισχύει $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ αλλά όχι και $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{-2}{-3}} = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$.

Επίσης, για να ορίζεται η ποσότητα $\sqrt{\frac{x-2}{4+y}}$ θα πρέπει $(x-2) \cdot (4+y) \geq 0$, δηλαδή το x-2 και το 4+y να είναι ομόσημα.

Όμως, για να ορίζεται η ποσότητα $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{4+y}}$ θα πρέπει $x - 2 \geq 0$ και $4 + y > 0$, δηλαδή και οι δύο ποσότητες οφείλουν να είναι θετικές ή μηδέν (ο παρονομαστής διάφορος του μηδενός).

Δ ρητοποίηση κλάσματος

Για τη ρητοποίηση κλάσματος που έχει ως παρονομαστή ριζικά ή μιγαδική ποσότητα, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος, με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, σύμφωνα με τον πίνακα που ακολουθεί.

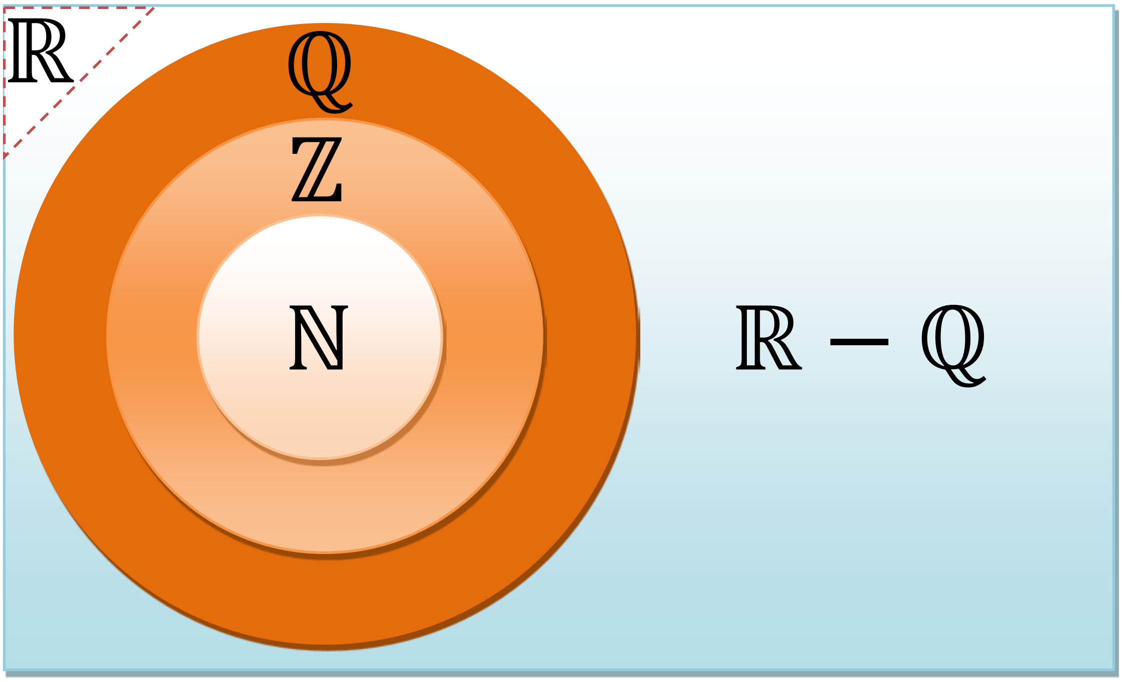
παρονομαστής	**συζυγής παράσταση**
$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\alpha}$
$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$	$\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-\nu}}$
$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$
$\alpha+\beta i$	$\alpha-\beta i$
$\alpha-\beta i$	$\alpha+\beta i$

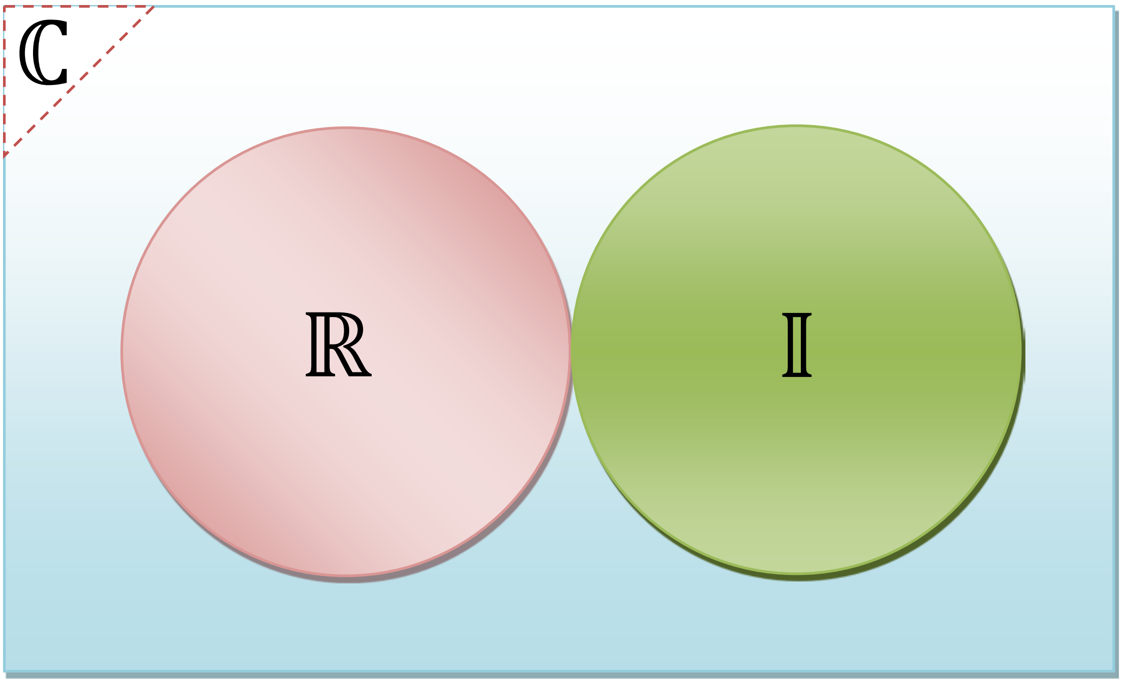
Ε σύνολα αριθμών

Τα σημαντικότερα σύνολα αριθμών, είναι τα παρακάτω:

σύμβολο	**όνομα**	**ερμηνεία**
$\mathbb{N}$	φυσικοί	$\{0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι	$\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί	στους ρητούς αριθμούς ανήκουν δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμών: ▶ οι απειροψήφιοι περιοδικοί αριθμοί π.χ. 3,723232323… ▶ οι πεπερασμένοι δεκαδικοί π.χ. 7,35
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	άρρητοι	στους άρρητους αριθμούς ανήκουν οι απειροψήφιοι μη περιοδικοί αριθμοί π.χ. $\sqrt{7},\pi,e$
$\mathbb{R}$	πραγματικοί	το σύνολο ρητών και άρρητων αριθμών σχηματίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{I}$	φανταστικοί	είναι αριθμοί της μορφής $\beta\cdot i$, με $\beta\in\mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα
$\mathbb{C}$	μιγαδικοί	είναι αριθμοί της μορφής $\alpha+\beta i$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα

Διαγραμματικά, τα σύνολα αριθμών παριστάνονται ως εξής:





ΣΤ οι περιορισμοί στην άλγεβρα

Οι συνηθέστερα εμφανιζόμενοι περιορισμοί στην Άλγεβρα είναι:

- Σε κλάσματα ζητάμε ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΕΣ $\neq 0$
- Στις ρίζες ζητάμε τα ΥΠΟΡΙΖΑ ≥ 0
- Στο $\log_\alpha x$ ζητάμε $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$
- Στην εφx ζητάμε $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Στη σφx ζητάμε $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$