

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου Όρια – Συνέχεια

Επιμέλεια: Σ. Ασημέλλης

Θέμα Α

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(4)$ και η $h(x) = f(x) - f(x+2)$ συνάρτηση.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $h(x)$

Μονάδες 5

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi+2)$.

Μονάδες 10

2. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [2,4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = -3$. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(1) - 2)x^3 - 3x + 1]$$

Μονάδες 12

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = -2$ και $-1, 2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 f(0) + 1}{x^2 + 2}$$

Μονάδες 13

Θέμα Γ

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 3$$

και

$$2\eta\mu(x - 1) \leq (x - 1)f(x) \leq x^2 - 1$$

για κάθε $x \in (0,1)$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \ln x - 3$, $x \in (0,1)$.

Μονάδες 10

2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 15

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y > 0$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ που έχει μοναδική ρίζα.

1. Να βρείτε το $f(1)$

Μονάδες 3

2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

Μονάδες 8

3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 2) + f(x) = f(5x - 6)$

Μονάδες 8

4. Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Μονάδες 6